

Première partie

**Diffraction**

# Chapitre 1

## Diffraction

---

### 1.1 Rappels sur l'onde plane

#### 1.1.1 Généralités

On se place dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (milieu parfait) loin des sources de champ électromagnétique (densité de charge nulle, densité de courant nulle). L'équation de propagation du champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0}\end{aligned}\tag{1.1}$$

L'*onde plane* est une solution particulière de cette équation. Les champs ne dépendent que d'une seule variable d'espace que l'on notera ici  $z$ . L'équation de propagation se simplifie sous cette hypothèse et l'on montre que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'écrivent comme la somme de deux vibrations se propageant en sens inverse l'une de l'autre à la vitesse  $v$  :

$$\vec{E}(t \pm \frac{z}{v}) \quad \text{et} \quad \vec{B}(t \pm \frac{z}{v})$$

L'*onde plane monochromatique* ou onde plane sinusoïdale est une forme particulière de ces solutions pour lesquelles  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont des fonctions trigonométriques : cosinus, sinus ou plus généralement exponentielles complexes. Si  $\omega$  est la pulsation de la fonction trigonométrique on écrit :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

où  $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \hat{z}$  est le vecteur d'onde.

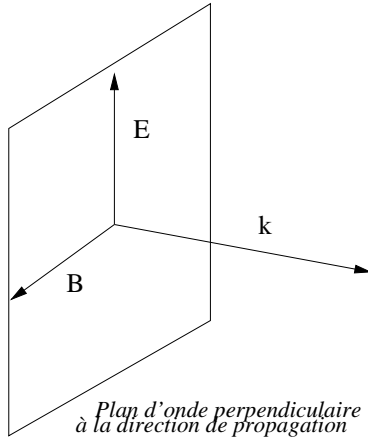
Généralement les ondes proviennent de sources quelque part dans l'espace et se propagent de la source vers le point courant (point où les champs sont calculés). On doit alors choisir le signe + ou - dans les expressions ci-dessus. Sauf indication contraire on choisira le signe - (propagation vers les  $z > 0$ , l'onde est dite *progressive*).

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{cases}\tag{1.3}$$

et l'on a

$$\vec{B} = \frac{\hat{k}}{v} \wedge \vec{E} \quad E = vB$$

La structure de l'onde plane est schématisée par la figure ci-après. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation  $\hat{k}$ , en phase et constants dans tout plan perpendiculaire à  $\hat{k}$  dit *plan d'onde*.



### Champ scalaire — Amplitude complexe

On considérera un champ scalaire  $\mathcal{U}(\vec{r}, t)$  qui représente l'a valeur algébrique du champ électrique, c'est à dire

$$\mathcal{U}(\vec{r}, t) = E_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.4)$$

Comme  $E$  et  $B$  sont proportionnels le champ scalaire  $\mathcal{U}(\vec{r}, t)$  peut aussi bien représenter le champ magnétique. On écrira donc pour plus de généralité

$$\mathcal{U}(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.5)$$

$\psi_0$  valant indifféremment  $E_0$  ou  $B_0$ . On appellera *amplitude complexe*, notée  $\psi(\vec{r})$  la partie spatiale de  $\mathcal{U}(\vec{r}, t)$  :

$$\psi(\vec{r}) = E_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.6)$$

Le champ scalaire suffit à décrire l'onde plane tant qu'on ne s'intéresse pas à la polarisation. Par commodité, on dira très souvent "onde plane" pour désigner une onde plane monochromatique.

### Conventions de notation

On posera  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  où  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont les composantes du vecteur unitaire  $\hat{k}$ , appelés aussi *cosinus directeurs* du vecteur  $\vec{k}$ . On a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (1.7)$$

On écrira alors l'onde plane sous la forme

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] \quad (1.8)$$

$\alpha, \beta$  et  $\gamma$  peuvent s'écrire en fonction des deux angles  $(\theta_x, \theta_y)$  des coordonnées sphériques comme définis sur la figure 1.1 :

$$\begin{cases} \alpha = \sin \theta_x \\ \beta = \cos \theta_x \cdot \sin \theta_y \\ \gamma = \cos \theta_x = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \end{cases}$$

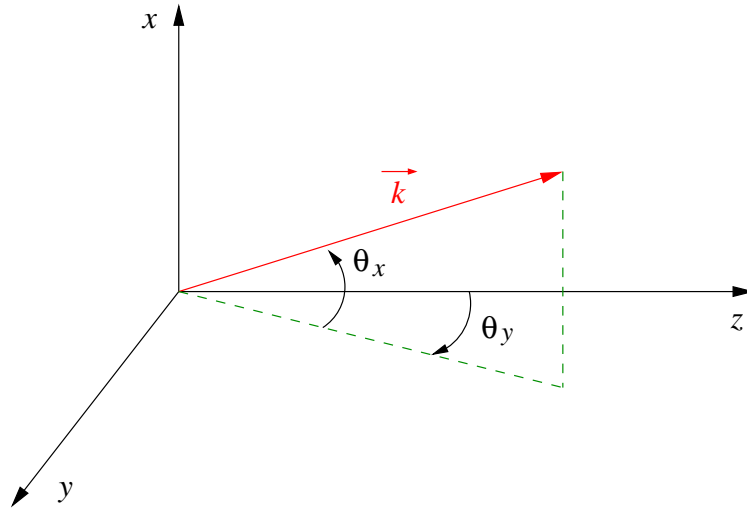


FIGURE 1.1 – Un vecteur  $\vec{k}$  et dans le système d'axes  $(x, y, z)$ . On définit les cosinus directeurs par  $\alpha = \sin \theta_x = \frac{k_x}{k}$  et  $\beta = \cos \theta_x \cdot \sin \theta_y = \frac{k_y}{k}$ .

**Approximation paraxiale pour l'onde plane**

On suppose que l'incidence de l'onde, c'est à dire l'angle formé par le vecteur d'onde et l'axe optique  $z$ , est faible. C'est à dire  $|\theta_x| \ll 1$  et  $|\theta_y| \ll 1$ . C'est souvent le cas quand on fait des expériences optiques sur banc. Sous cette hypothèse, les cosinus directeurs s'écrivent sous la forme approchée suivante :

$$\begin{cases} \alpha \simeq \theta_x \\ \beta \simeq \theta_y \\ \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \simeq 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \end{cases}$$

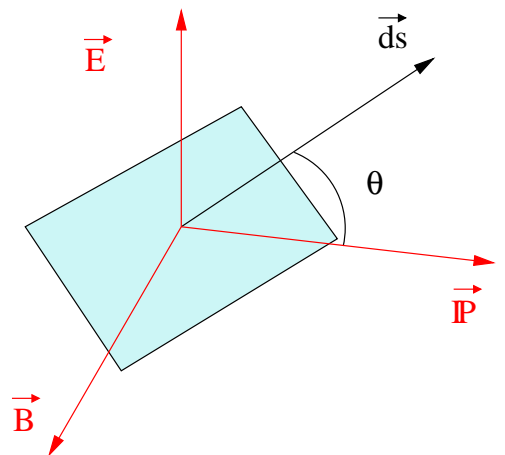
Chiffrons un ordre de grandeur de l'angle en dessous duquel on peut considérer que l'on est en optique paraxiale. On approxime généralement  $\gamma$  au deuxième ordre pour des raisons qui seront vues plus loin. L'erreur que l'on fait sur  $\gamma$  est égale au terme suivant du développement, soit  $(\alpha^2 + \beta^2)^2/8$ . Un angle de  $1^\circ$  donne une erreur de l'ordre de 0.0001 sur  $\gamma$  si l'on fait l'approximation paraxiale. Avec un angle de  $10^\circ$  l'erreur sur  $\gamma$  devient de l'ordre de 0.01. Au delà, l'erreur devient trop grande et l'approximation paraxiale devient trop imprécise. On retiendra que l'approximation paraxiale pour l'onde plane peut être faire si les angles d'inclinaison sont inférieurs à  $10^\circ$ .

**Intensité d'une onde**

On appelle *intensité* la puissance par unité de surface que transporte l'onde. Considérons une onde plane de champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Autour un point  $M$  de l'espace repéré par sa position  $\vec{r}$ , on définit un élément de surface orienté  $d\vec{s} = ds \vec{n}$ .

Par définition, la puissance  $dW$  qui traverse l'élément de surface  $d\vec{s}$  est le flux du vecteur de Poynting  $\vec{\mathbb{P}}$  :

$$dW = \vec{\mathbb{P}} \cdot d\vec{s} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s}$$



Ce qui donne, compte-tenu du fait que le champ électromagnétique doit être exprimé en notation réelle pour

faire le produit vectoriel :

$$dW = \frac{|E_0| |B_0|}{\mu_0} |\cos \theta| \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) ds$$

d'où l'intensité *instantannée* de l'onde plane, définie positive,

$$\mathcal{I}(\vec{r}, t) = \frac{dW}{ds} = \frac{|E_0|^2}{\mu_0 v} |\cos \theta| \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Cette fonction sinusoïdale a une pulsation temporelle  $T = 10^{-14}$  s environ dans le visible. L'oeil a un temps d'intégration de 40 ms environ, les caméras rapides ont des temps de pose de l'ordre de la milliseconde et ne voient en fait pas cette fonction  $\mathcal{I}(\vec{r}, t)$  mais sa moyenne sur le temps de pose  $\tau$ , soit la quantité  $I$  :

$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{|E_0|^2}{\mu_0 v} |\cos \theta| \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt$$

Pour l'oeil, l'intégrale porte sur plus de  $10^{12}$  périodes du  $\cos^2$ , et pour les caméras rapides on intègre environ  $10^{10}$  périodes. L'intégrale vaut alors

$$I = \frac{|E_0|^2}{\mu_0 v} |\cos \theta| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt \simeq \frac{|E_0|^2}{\mu_0 v} \cos \theta \langle \cos^2(\cdot) \rangle$$

et la valeur moyenne d'un  $\cos^2$  étant de  $1/2$ , l'intensité est donnée par

$$I = \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 v} |\cos \theta|$$

On obtient ainsi le résultat suivant lequel, pour une onde plane monochromatique, l'intensité est proportionnelle au module du champ électrique de l'onde  $|E_0| = |E(\vec{r}, t)|$ . Par habitude, on pose la constante de proportionnalité égale à 1. On écrira

$$\boxed{I = |\psi(\vec{r})|^2} \quad (1.9)$$

avec  $\psi(\vec{r})$  l'attention est attirée sur le fait que la quantité  $I$  n'est ici plus homogène à une puissance par unité de surface ( $\text{W}/\text{m}^2$ ), mais au carré d'un champ électrique.

**Cas d'une onde monochromatique quelconque** Le calcul d'intensité, établi dans le cas d'une onde plane (dont les surfaces d'onde sont des plans) se généralise aux ondes monochromatiques d'amplitude complexe  $\psi(\vec{r})$  quelconque, s'écrivant  $\psi(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\phi(\vec{r})}$  avec  $A$  et  $\phi$  réels. Les surfaces d'ondes sont en effet assimilables localement à des plans sur la surface  $ds$  définie au paragraphe précédent autour du point  $M$ . Un développement limité permet de s'en convaincre, en effet :

$$\phi(\vec{r}) \simeq \phi_0 + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{r}$$

avec  $\phi_0$  une constante, et  $A(\vec{r}) \simeq A_0$  avec  $A_0$  une constante (on ne gardera que l'ordre 0 qui suffit pour le terme  $A(\vec{r})$ ). Ainsi l'amplitude complexe de l'onde s'approxime, autour du point  $M$ , par

$$\psi(\vec{r}) \simeq A_0 e^{i\phi_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

c'est à dire une onde plane, avec  $\vec{k} = \nabla \phi$  un vecteur d'onde "local", gradient de la phase de l'onde au point  $M$ . Le raisonnement qui a conduit au calcul de l'intensité pour une onde plane s'applique donc aussi au cas d'une onde quelconque qui est localement plane. L'intensité est donc là aussi le carré du module de l'amplitude complexe

$$I(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$$

## 1.2 L'onde sphérique monochromatique

Une solution particulière de l'équation de propagation concerne les ondes émises par les sources ponctuelles : les *ondes sphériques* dont l'image naïve est celle des "ronds dans l'eau" obtenus lorsqu'on lance une pierre dans

l'eau. Une onde sphérique est caractérisée par la symétrie sphérique de son champ électromagnétique. Si elle est monochromatique, alors son champ électrique s'écrit

$$\mathcal{U}(\vec{r}, t) = \psi(r) e^{-i\omega t}$$

L'équation de propagation de  $\psi$  prend alors la forme

$$\Delta\psi - \frac{\omega^2}{v^2}\psi = 0$$

avec le laplacien réduit à sa partie radiale qui s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

en introduisant le vecteur d'onde  $k = \frac{\omega}{v}$  l'équation devient

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) - k^2 r^2 \psi = 0$$

Le changement de variable  $f(r) = r\psi(r)$  permet de se ramener à l'équation d'un oscillateur harmonique

$$f'' + k^2 f = 0$$

dont la solution en  $\exp \pm ikr$  permet d'écrire la forme générale de l'onde sphérique

$$\boxed{\mathcal{U}(\vec{r}, t) = \frac{\psi_0}{r} e^{i(\pm kr - \omega t)}} \tag{1.10}$$

Le signe de  $kr$  dans l'exponentielle détermine la nature convergente ou divergente de l'onde :



les surfaces d'onde se propagent vers  $-\hat{r}$ ,  
l'onde est **convergente**

les surfaces d'onde se propagent vers  $+\hat{r}$ ,  
l'onde est **divergente**

On peut noter deux différences avec l'écriture de l'onde plane

- $kr$  au lieu  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  : cette différence peut s'interpréter par le fait qu'en chaque point  $M$  la direction de propagation de l'onde est parallèle au rayon vecteur  $\vec{r} = \vec{SM}$ . On peut alors définir un *vecteur d'onde local*  $\vec{k} = k\hat{r}$  dont la norme vaut  $\frac{2\pi}{\lambda}$  et dont la direction est celle de la propagation au point  $M$ . Il est aisé de voir que  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr$ .
- L'amplitude décroît comme  $\frac{1}{r}$ , donc l'intensité comme  $\frac{1}{r^2}$ . La puissance qui traverse des sphères centrées sur la source est alors indépendante du rayon de la sphère : c'est l'expression de la conservation de l'énergie.

**Cas d'une onde sphérique dont la source n'est pas en  $O$**  On note  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  les coordonnées de la source (ou du point de convergence pour une onde convergente). Un simple changement de repère permet d'écrire l'amplitude complexe de l'onde sphérique dans ce cas :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\psi_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} e^{\pm ik|\vec{r} - \vec{r}_0|} \tag{1.11}$$

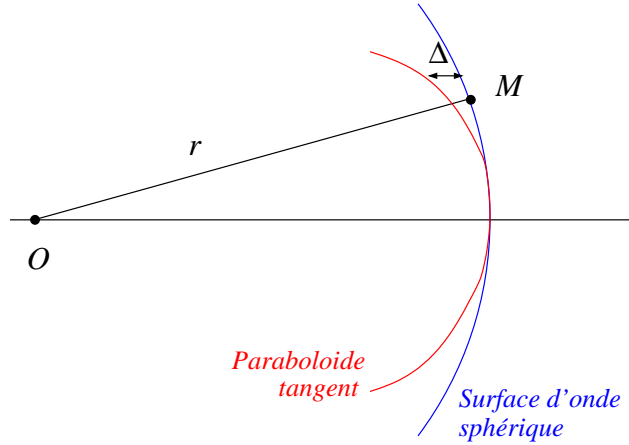


FIGURE 1.2 – Surface d’onde d’une onde sphérique et son approximation paraxiale, le paraboloïde tangent. L’écart  $\Delta$  entre les deux surfaces est  $\Delta \simeq \frac{\rho^4}{8|z|^3}$ , terme du 3e ordre du développement limité de  $r$ .

### 1.2.1 Approximation paraxiale pour l’onde sphérique

On considère une onde sphérique dont la source est en  $O$ , on cherche à exprimer son amplitude complexe en un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  avec la condition  $|x| \ll |z|$  et  $|y| \ll |z|$  (point proche de l’axe : les rayons provenant de la source sont peu inclinés en  $M$ ). On supposera que l’onde est divergente (signe  $+$ ) dans l’exponentielle. Il suffira de changer  $k$  en  $-k$  dans les expressions qui vont suivre pour une onde convergente. L’amplitude complexe en  $M$  est

$$\psi(r) = \frac{\psi_0}{r} e^{ikr}$$

avec  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Notons  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , on a

$$r = |z| \left( 1 + \frac{\rho^2}{z^2} \right)^{1/2}$$

puisque  $\rho \ll |z|$  on fait un développement limité de  $r$

$$r \simeq |z| \left( 1 + \frac{\rho^2}{2z^2} - \frac{\rho^4}{8z^4} \right) = |z| + \frac{\rho^2}{2|z|} - \frac{\rho^4}{8|z|^3}$$

Pour savoir à quel ordre on peut stopper le développement limité, il faut prendre des hypothèses sur les valeurs de  $\rho$ ,  $z$  et  $k$ . Prenons les valeurs  $\rho = 1$  cm,  $z = 1$  m, et  $k = 10^7$  m<sup>-1</sup> (lumière visible). Les trois termes intervenant dans le développement de  $r$  valent

- terme (1) :  $|z| = 1$
- terme (2) :  $\frac{\rho^2}{2|z|} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$
- terme (3) :  $\frac{\rho^4}{8|z|^3} \simeq 10^{-8}$

On pourrait ainsi se contenter du premier terme en posant simplement  $r = |z|$ , qui donne une erreur à la cinquième décimale. Cette approximation est suffisante pour le terme  $\frac{1}{r}$  qui intervient devant l’exponentielle complexe. Mais pas pour le terme  $e^{ikr}$  à cause de la grande valeur de  $k$  et il est nécessaire, à l’intérieur de l’exponentielle, de garder les deux premiers termes (le 3e peut par contre être négligé). Ainsi, une onde sphérique dans l’approximation paraxiale s’écrira :

$$\boxed{\psi(r) \simeq \frac{\psi_0}{|z|} e^{ik|z|} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2|z|}\right)} \quad (1.12)$$

Dans un plan  $z = Cte$ , on voit que la phase de l’onde est en  $\rho^2$ , la surface d’onde est un paraboloïde. Il s’agit du paraboloïde tangent à la sphère au point  $(0, 0, z)$ , on parle de paraboloïde *osculateur* (même courbure que la sphère), voir figure 1.2.

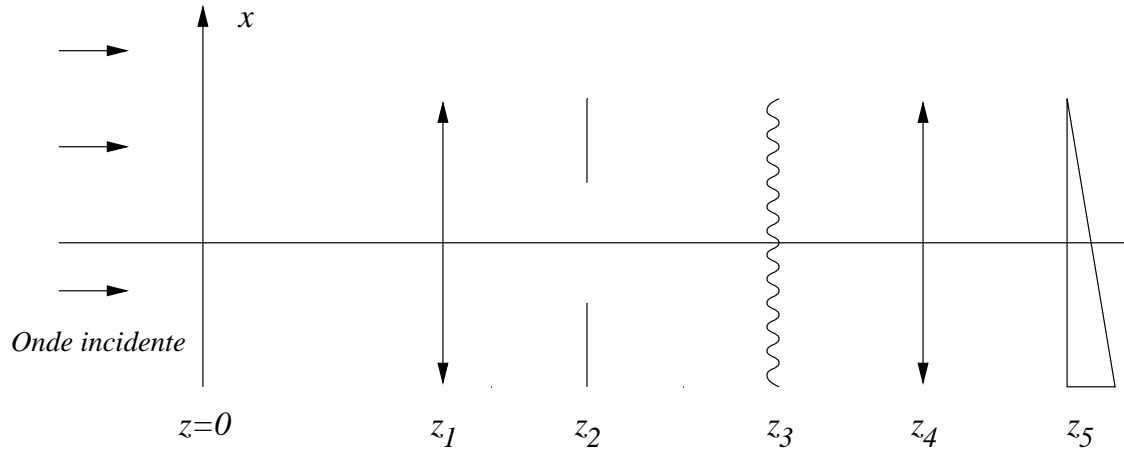


FIGURE 1.3 – Une expérience optique sur banc consiste souvent à éclairer avec une onde plane un ensemble d’éléments optiques comme des lentilles ou diaphragmes. Si la direction de propagation de l’onde est  $\hat{z}$ , les éléments optiques sont dans des plans transversaux  $z = z_i$ . Pour étudier l’effet des éléments optiques sur la propagation de l’onde, il convient de connaître son amplitude dans chacun des plans  $z = z_i$ .

**A quelle distance peut on faire l’approximation paraxiale ?** Il faut que  $z$  soit assez grand pour pouvoir négliger l’ordre 3 du développement limité de  $kr$ , donc que

$$k \frac{\rho^4}{8|z|^3} \ll 1$$

ce qui donne

$$z \gg \left( \frac{\rho^4}{\lambda} \right)^{1/3}$$

Avec les valeurs numériques  $\rho = 1 \text{ cm}$  et  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ , on obtient la condition  $z \gg 20 \text{ cm}$ .

**Et à distance encore plus grande ?** Lorsque  $z$  devient assez grand, on pourra négliger aussi le second ordre du développement limité de  $kr$ . Dans ce cas l’amplitude complexe de l’onde s’écrit :

$$\psi(r) \simeq \frac{\psi_0}{|z|} e^{ik|z|}$$

c’est à dire une onde plane, dont les surfaces d’onde sont des sphères de rayon de courbure assez grand pour les approximer par leur plan tangent. On parle alors de *champ lointain*, et cette approximation de l’onde sphérique par une onde plane conduit à la diffraction de Fraunhofer ou diffraction à l’infini, qui sera abordée plus loin. Cela se produit lorsque

$$k \frac{\rho^2}{2|z|} \ll 1$$

c’est à dire

$$z \gg \frac{\rho^2}{\lambda}$$

Avec les valeurs numériques  $\rho = 1 \text{ cm}$  et  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ , on obtient la condition  $z \gg 100 \text{ m}$ .

### 1.3 Propagation d’une onde plane

#### 1.3.1 Problématique

En optique on fait souvent des expériences sur un banc, l’axe du banc est appelé *axe optique*. La lumière traverse divers éléments optiques (diaphragmes, primes, lentilles, etc...) disposés dans des plans transversaux  $z = \text{Cte}$



comme schématisé sur la figure 1.3. Pour étudier les effets d'un élément optique sur l'onde qui le traverse, il importe de connaître l'expression de l'amplitude de l'onde dans le plan de l'élément optique. Il importe également, connaissant l'amplitude de l'onde dans le plan de sortie  $z = z_1$  d'un dispositif, de pouvoir calculer son amplitude dans un plan plus éloigné  $z = z_2$  dans lequel se trouve éventuellement un autre élément optique. La transformation mathématique permettant, connaissant l'onde dans un plan  $z = z_1$ , de calculer son amplitude dans un plan  $z = z_2$  est appelée *transformée de Fresnel*, le phénomène physique en jeu est la propagation de la lumière encore appelée *diffraction à distance finie* ou *diffraction de Fresnel*.

### 1.3.2 Propagation d'une onde plane

Soit une onde plane (monochromatique) d'amplitude complexe  $\psi(\vec{r})$  de vecteur d'onde  $\vec{k}$  quelconque, se propageant vers les  $z > 0$ . L'espace est repéré par un système d'axes  $(x, y, z)$ ,  $z$  étant l'axe optique. On note :

$$f_{z_1}(x, y) = \psi(x, y, z_1)$$

$$f_{z_2}(x, y) = \psi(x, y, z_2)$$

Cette notation fait bien ressortir le fait que  $z$  est ici un paramètre et que les amplitudes  $f_z$  sont des fonctions bidimensionnelles. Si  $\psi(x, y, z) = \exp\left[\frac{2i\pi z}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right]$ , il est trivial de voir que :

$$f_{z_2}(x, y) = f_{z_1}(x, y) \exp\left[\frac{2i\pi\gamma(z_2 - z_1)}{\lambda}\right] \quad (1.13)$$

Un onde plane qui se propage d'un plan  $z_1$  à un plan  $z_2$  subit donc un simple déphasage. Ce ne sera pas le cas pour les autres types ondes dont on va montrer qu'elles subissent une transformation plus compliquée qu'un simple déphasage.

## 1.4 Propagation d'une somme discrète d'ondes planes

On considère une somme discrète de  $N$  ondes planes monochromatiques ayant toutes la même pulsation  $\omega$  et dont les champs électriques sont parallèles. Les vecteurs d'onde seront notés  $\vec{k}_n$  de composantes  $\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ . L'amplitude complexe s'écrit :

$$\psi(x, y, z) = f_z(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n z)\right]$$

Nous cherchons à dégager la relation qui existe entre les valeurs de l'amplitude dans deux plans  $z = 0$  et  $z = d$  (transformée de Fresnel de  $f_0(x, y)$  sur une distance  $d$ ). Nous savons écrire cette relation dans le cas d'une onde plane ; en utilisant le principe de superposition linéaire des champs électriques, il vient que l'amplitude en  $z = d$  de la somme d'ondes planes est la somme des amplitudes complexes de chacune des ondes planes en  $z = d$ . Nous connaissons l'expression de l'onde en  $z = 0$  :

$$f_0(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha_n x + \beta_n y)\right] \quad (1.14)$$

on effectue la propagation individuelle de chaque onde plane : cela consiste à multiplier chaque terme de la somme par  $\exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\gamma_n d)\right]$ . On fait ensuite la somme pour obtenir l'expression de l'amplitude de l'onde en  $z = d$  :

$$f_d(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n d)\right] \quad (1.15)$$

$\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont connus si l'on connaît  $f_0(x, y)$ ,  $\gamma_n$  ne l'est pas mais peut être obtenu par la relation  $\gamma_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2 - \beta_n^2}$ .

## 1.5 Propagation d'une onde monochromatique quelconque

Soit  $\mathcal{U}(\vec{r}, t)$  le champ électrique d'une onde quelconque. Ce champ est solution de l'équation de propagation et est à ce titre une combinaison linéaire de fonctions de type  $\exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . Si l'onde est monochromatique, la pulsation est la même pour tous les termes de la combinaison linéaire et il vient en facteur un  $e^{-i\omega t}$ . Le champ s'écrit alors :

$$\mathcal{U}(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

la partie spatiale  $f_z(x, y) = \psi(x, y, z)$  est simplement l'amplitude complexe de l'onde

### 1.5.1 Propagation de l'onde entre deux plans $z = \text{Cte}$

Soit  $f_0(x, y)$  l'amplitude supposée connue d'une onde monochromatique quelconque dans le plan  $z = 0$ . Cette fonction bidimensionnelle est somme de sa transformée de Fourier :

$$f_0(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(u, v) e^{2i\pi(ux+vy)} du dv \quad (1.16)$$

Faisons le changement de variables  $\alpha = \lambda u$ ,  $\beta = \lambda v$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. Il vient

$$f_0(x, y) = \iint \frac{1}{\lambda^2} \hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\right] d\alpha d\beta \quad (1.17)$$

La quantité  $\hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$  est appelée *spectre angulaire* de  $f_0(x, y)$ . Comparons cette expression à l'équation 1.14 exprimant une somme discrète d'ondes planes dans le plan  $z = 0$ . Nous avons ici la même formule en ayant remplacé la somme discrète par une intégrale. L'amplitude  $f_0(x, y)$  apparaît alors comme une somme continue d'ondes planes se propageant dans des directions  $(\alpha, \beta)$ . Le terme  $\hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) d\alpha d\beta$  est l'équivalent du  $A_n$  de la formule 1.14 et représente le poids de chacune des ondes planes dans la somme. Pour obtenir l'expression  $f_z(x, y)$  de l'amplitude de l'onde dans un plan  $z \neq 0$  il suffit de multiplier chaque onde plane par un terme  $\exp \frac{2i\pi\gamma z}{\lambda}$  où  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ , puis de faire la somme. Il vient :

$$f_z(x, y) = \iint \frac{1}{\lambda^2} \hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right] d\alpha d\beta \quad (1.18)$$

### 1.5.2 Principe de Huygens-Fresnel

On se place pour la suite du raisonnement dans les conditions de l'optique paraxiale. Posant  $\gamma = 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ , l'expression de  $f_z(x, y)$  devient <sup>1</sup>

$$f_z(x, y) = e^{\frac{2i\pi z}{\lambda}} \iint \frac{1}{\lambda^2} \hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left[-\frac{i\pi z}{\lambda}(\alpha^2 + \beta^2)\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\right] d\alpha d\beta \quad (1.19)$$

le changement de variable  $u = \alpha/\lambda$ ,  $v = \beta/\lambda$  donne

$$f_z(x, y) = e^{\frac{2i\pi z}{\lambda}} \iint \hat{f}_0(u, v) \exp[-i\pi\lambda z(u^2 + v^2)] e^{2i\pi(ux+vy)} du dv \quad (1.20)$$

et en posant

$$\hat{g}_0(u, v) = \exp[-i\pi\lambda z(u^2 + v^2)]$$

on cette expression est celle d'une transformée inverse de Fourier :

$$f_z(x, y) = e^{\frac{2i\pi z}{\lambda}} \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}_0(u, v) \cdot \hat{g}_0(u, v)\right\} \quad (1.21)$$

1. Le lecteur aura remarqué que l'approximation paraxiale est faite alors que l'intégration va de  $-\infty$  à  $\infty$  pour les variables  $\alpha$  et  $\beta$ . Cette approximation n'est en fait possible que si la fonction  $\hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$  est rapidement décroissante de manière à limiter le domaine où l'intégrale a des valeurs significatives (support  $\ll 1$ ). Si la fonction  $f_0(x, y)$  a un support  $a$  (cas d'une onde plane ayant traversé un diaphragme de diamètre  $a$ ), alors  $\hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$  a un support  $\frac{\lambda}{a}$ . La condition sur le support de  $\hat{f}_0$  impose donc la condition  $a \gg \lambda$  : la diffraction de Fresnel telle que nous la décrivons est valable si les éléments optiques rencontrés par l'onde ont une taille grande devant la longueur d'onde. Dans le domaine des rayons X, les distances inter-atomiques sont comparables à  $\lambda$  et l'on utilise la *diffraction de Bragg*.

dans laquelle  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier (T.F.). Il vient

$$f_z(x, y) = e^{\frac{2i\pi z}{\lambda}} f_0(x, y) * g(x, y) \quad (1.22)$$

la fonction  $g(x, y)$  peut se calculer avec les relations entre T.F. suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ e^{i\pi x^2} \right\} &= \sqrt{i} e^{-i\pi u^2} \\ \mathcal{F} \{ h(ax) \} &= \frac{1}{|a|} \hat{h} \left( \frac{u}{a} \right) \end{aligned}$$

La deuxième de ces relations n'est valable qu'à la condition  $\arg(a) < \pi/4$  et n'est en particulier pas valable quand  $a = i$  (les résultats connus sur les TF de gaussiennes ne s'appliquent pas pour trouver la TF de  $e^{i\pi x^2}$  qui soit faire l'objet d'un calcul spécifique par exemple par la méthode des résidus). Il vient

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \exp \left[ i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right] \quad (1.23)$$

et la transformée de Fresnel s'écrit comme une convolution

$$f_z(x, y) = e^{\frac{2i\pi z}{\lambda}} f_0(x, y) * \frac{1}{i\lambda z} \exp \left[ i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right] \quad (1.24)$$

la fonction  $g(x, y)$  est la réponse impulsionnelle de la diffraction de Fresnel. Cette dernière peut ainsi être interprétée comme un *filtrage linéaire* des fréquences spatiales de  $f_0$ .

En remarquant que le terme

$$\frac{1}{z} e^{\frac{2i\pi z}{\lambda}} \exp \left[ i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right]$$

est l'expression d'une onde sphérique en optique paraxiale, on peut mettre  $f_z$  sous la forme plus générale :

$$f_z(x, y) = f_0(x, y) * \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \quad (1.25)$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , la convolution portant uniquement sur les variables  $x$  et  $y$ .

Ce résultat est connu sous le nom de *Principe de Huygens-Fresnel*. Il peut s'interpréter de la manière suivante : chaque point du plan  $z = 0$  émet une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à  $f_0(x, y)$ . Toutes ces ondes sphériques se propagent et l'amplitude en un point du plan  $z$  est la somme des amplitudes de toutes ces ondes sphériques. La figure 1.4 illustre ce phénomène.

Une partie de ce principe a été énoncée par Huygens en 1678 : chaque partie de la surface d'onde se comporte comme une source secondaire émettant une quantité de lumière proportionnelle à celle reçue par la source secondaire. Il a été complété par Fresnel en 1818 avec l'idée d'addition cohérente en chaque point des amplitudes des ondes émises par chaque source secondaire. Le nom de "principe de Huygens-Fresnel" date de 1818.

On doit la première démonstration mathématique à Kirchhoff (1882), sous certaines hypothèses : longueurs d'ondes grandes devant les distances inter-atomiques, matériaux constituant les éléments optiques "inertes" : par exemple un diaphragme en acier produit les mêmes effets qu'un diaphragme en plastique. En 1896, Sommerfeld a réalisé un traitement électromagnétique complet du problème de la diffraction d'une onde plane qui rencontre un demi-plan infini parfaitement conducteur.

Il est à noter que le principe de Huygens-Fresnel, établi ici en optique paraxiale, reste valable quelle que soit l'incidence. Des démonstrations mathématiques existent qui font intervenir les fonctions de Green (voir par exemple le Born et Wolf, "Principle of Optics").

**Transformée de Fourier-Fresnel** En optique paraxiale on peut mettre l'équation 1.24 sous une forme un peu différente plus pratique pour certains calculs. On explicite le produit de convolution :

$$f_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint f_0(x', y') \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda z} ((x - x')^2 + (y - y')^2) \right] dx' dy' \quad (1.26)$$

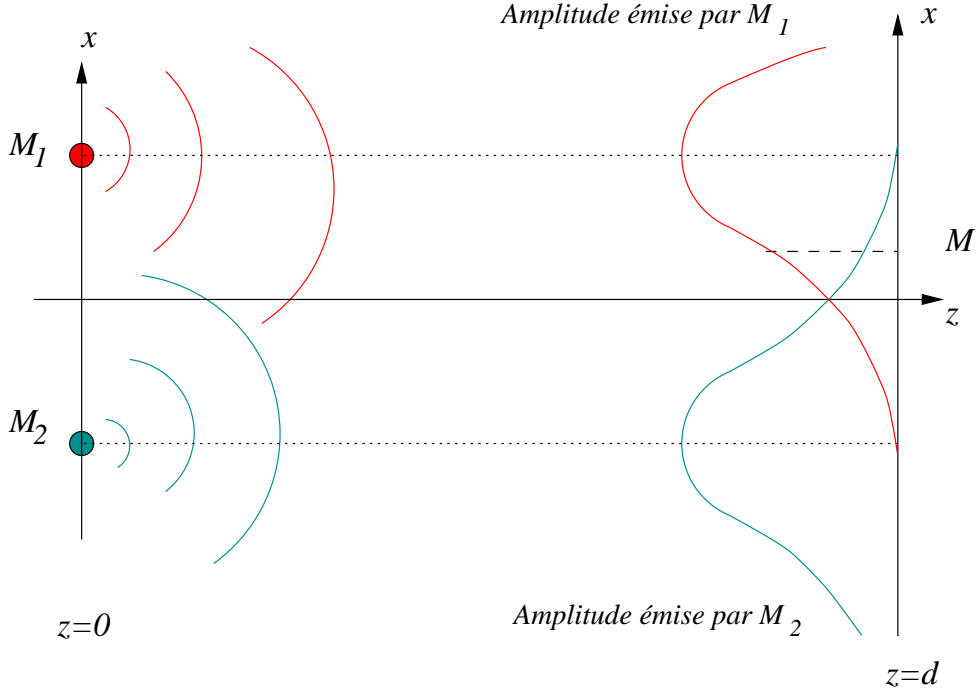


FIGURE 1.4 – Illustration du principe de Huygens-Fresnel. L’onde dans le plan  $z = 0$  est découpée en une infinité de points-source comme les points  $M_1$  et  $M_2$  sur le dessin. Ces points-sources émettent chacun une onde sphérique dans la direction  $z > 0$ . L’amplitude de ces ondes sphériques est proportionnelle à la valeur de l’amplitude de l’onde incidente au niveau des points-sources. En un point  $M$  du plan  $z = d$ , les amplitudes des ondes sphériques émises par chacun des points s’ajoutent. L’amplitude en  $M$  est la somme de toutes ces amplitudes.

et on fait apparaître l’expression d’une TF à deux dimensions :

$$f_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \iint f_0(x', y') \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x'^2 + y'^2)\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda z}(xx' + yy')\right] dx' dy' \quad (1.27)$$

que l’on peut écrire à l’aide de la notation  $\mathcal{F}_{u,v}\{f(x, y)\} = \hat{f}(u, v)$  :

$$f_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}} \left\{ f_0(x', y') \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x'^2 + y'^2)\right] \right\} \quad (1.28)$$

cette relation est la *transformée de Fourier-Fresnel*.

## 1.6 Diffraction à l’infini ou de Fraunhofer

Faisons tendre  $z \rightarrow \infty$  dans l’expression de la transformée de Fourier-Fresnel. Il vient :

$$f_\infty(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} (\text{terme} \rightarrow 1) \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}} \{f_0(x', y') (\text{terme} \rightarrow 1)\} \quad (1.29)$$

soit :

$$f_\infty(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \hat{f}_0\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \quad (1.30)$$

L’amplitude complexe diffractée à l’infini d’une onde (on parle aussi de “champ lointain” est égale à la transformée de Fourier de l’amplitude de cette onde dans le plan  $z = 0$ . Ce résultat important décrit par Fraunhofer permet d’observer des TF bidimensionnelles “optiques” sans avoir besoin de faire un calcul sur ordinateur.

### 1.6.1 A quelle distance est on en diffraction à l'infini ?

Prenons l'exemple d'une onde plane de longueur d'onde  $\lambda = 0.6\mu\text{m}$  qui traverse un petit diaphragme de rayon  $d$  mm situé dans le plan  $z = 0$ . Nous allons déterminer la valeur de  $z$  à partir de laquelle l'approximation de Fraunhofer donne une erreur faible sur la valeur de l'amplitude complexe.

Cette approximation consiste à évaluer à 1 le terme

$$\exp\left(i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda z}\right)$$

présent dans la transformée de Fresnel. Au premier ordre en  $x'^2 + y'^2$  il vient :

$$\exp\left(i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda z}\right) \simeq 1 + i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda z}$$

$x'$  et  $y'$  sont des variables d'intégration dans le plan du diaphragme et vérifient  $x'^2 + y'^2 \leq d^2$ . L'erreur  $\epsilon$  commise dans l'approximation de Fraunhofer est donc :

$$\epsilon \simeq \frac{d^2}{\lambda z}$$

la valeur de  $z$  telle que cette erreur  $\epsilon \ll 1$  doit donc vérifier

$$\boxed{z \gg \frac{d^2}{\lambda}} \tag{1.31}$$

Avec  $a = 1$  cm et  $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ , on obtient  $z \gg 200$  mètres. Deux problèmes techniques se posent alors pour réaliser une "bonne" expérience de diffraction à l'infini :

- Un problème d'encombrement du montage optique au vu des distances nécessaires
- Un problème de luminosité, l'amplitude décroissant comme  $\frac{1}{z}$  et l'intensité comme  $\frac{1}{z^2}$ . Dans l'exemple ci-dessus la figure de diffraction de Fraunhofer serait 40 000 fois moins lumineuse que l'onde dans le plan du diaphragme.

On verra par la suite que l'on peut quand même réaliser une diffraction à l'infini sur des distances raisonnables en observant dans le plan focal d'une lentille convergente.

### 1.6.2 Autre démonstration à partir du principe de Huygens-Fresnel

Ecrivons l'expression du principe de Huygens-Fresnel entre les amplitudes  $f_0(x', y')$  et  $f_z(x, y)$  :

$$f_z(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint f_0(x', y') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' \tag{1.32}$$

où  $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$  est la position du point courant et  $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$  celle d'un point dans le plan  $z = 0$ . Faisons tendre  $z \rightarrow \infty$ , il vient

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \tag{1.33}$$

c'est une onde sphérique et l'approximation peut être faite à l'ordre zéro au dénominateur. On écrit :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r}$$

alors que le terme intervenant dans l'exponentielle doit être développé à l'ordre suivant à cause du vecteur d'onde  $k$  qui peut être grand (de l'ordre de  $10^7$  en lumière visible). Il vient :

$$f_\infty(x, y) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \iint_{-\infty}^{\infty} f_0(x', y') e^{-ik\hat{r} \cdot \vec{r}'} dx' dy' \tag{1.34}$$

Introduisons les coordonnées du vecteur unitaire  $\hat{r} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  On obtient là encore l'expression d'une transformée de Fourier :

$$\boxed{f_\infty(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)} \tag{1.35}$$

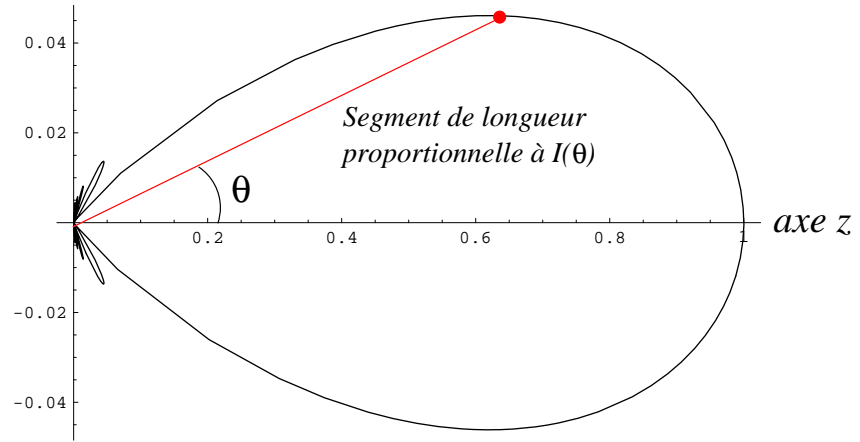


FIGURE 1.5 – La courbe ci-dessus montre l’indicatrice de diffraction dans le plan ( $y = 0$ ) pour la lumière diffractée par une fente rectangulaire, éclairée en incidence normale. On note un maximum d’intensité diffractée sur l’axe, puis des petits lobes secondaires ; la figure est décrite par un sinus cardinal carré ; (voir paragraphe 1.8.1).

### 1.6.3 Indicatrice de diffraction

Le vecteur unitaire  $\hat{r}$  définit une direction dans le demi-espace  $z > 0$ . Cette direction ne dépend que de  $\alpha$  et  $\beta$  puisque la valeur de  $\gamma$  est fixée par  $|\hat{r}| = 1$ . On peut introduire des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que :

$$\sin \theta_1 = \alpha \qquad \sin \theta_2 = \beta$$

ces angles, lorsqu’ils sont faibles, s’identifient aux coordonnées sphériques  $\theta_x$  et  $\theta_y$  définies au début du chapitre. On peut ainsi écrire l’amplitude diffractée dans la direction d’angles  $(\theta_1, \theta_2)$  :

$$f_\infty(\theta_1, \theta_2) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \hat{f}_0 \left( \frac{\sin \theta_1}{\lambda}, \frac{\sin \theta_2}{\lambda} \right) \tag{1.36}$$

L’intensité est donnée par

$$I(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left| \hat{f}_0 \left( \frac{\sin \theta_1}{\lambda}, \frac{\sin \theta_2}{\lambda} \right) \right|^2 \tag{1.37}$$

Lorsque  $I$  est à symétrie de révolution autour de l’axe  $z$  (les deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont équivalents), on représente parfois cette fonction en coordonnées polaires sous la forme d’une courbe ; la distance entre l’origine du repère et l’extrémité de la courbe est proportionnelle à  $I(\theta)$  (voir figure 1.5). Cette courbe appelée *indicatrice de diffraction* ressemble aux diagrammes de rayonnement des antennes. Si l’intensité n’est pas à symétrie de révolution, cette courbe est une surface.

### 1.6.4 Figure de diffraction de Fraunhofer d’une onde plane

On considère une onde plane de vecteur d’onde  $\vec{k}$ . Cette onde s’écrit dans un plan  $z = 0$  :

$$f_0(x, y) = \psi_0 \exp \frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha_0 x + \beta_0 y) \tag{1.38}$$

L’amplitude diffractée à l’infini s’écrit

$$f_\infty(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \delta \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\lambda}, \frac{\beta - \beta_0}{\lambda} \right) \tag{1.39}$$

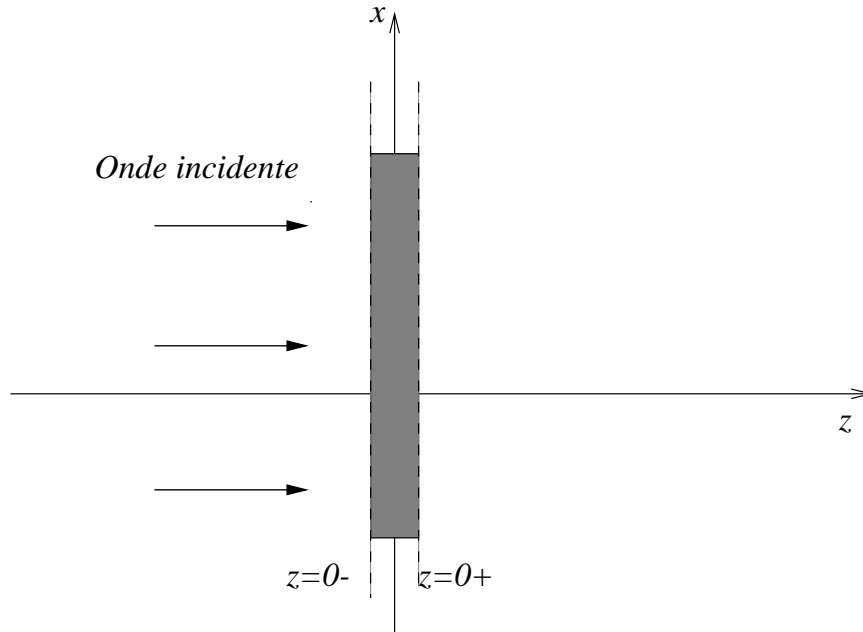
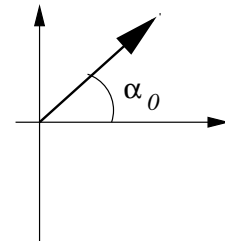


FIGURE 1.6 – Un élément optique est placé dans un plan transversal à la direction de propagation d’une onde. Cet écran est supposé quasiment plat et situé dans le plan  $z = 0$ . On note  $z = 0^-$  le plan d’entrée de l’écran et  $z = 0^+$  son plan de sortie. Le coefficient de transmission de l’écran est défini comme le rapport des amplitudes de l’onde sortante sur l’onde entrante.

et l’intensité

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\lambda^2}{r^2} \delta(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{1.40}$$



Si  $\alpha$  et  $\beta$  représentent la direction dans laquelle regarde l’oeil d’un observateur, cet observateur ne verra de la lumière que pour  $\alpha = \alpha_0$  et  $\beta = \beta_0$  correspondant à la direction de propagation de l’onde plane. L’indicatrice de diffraction est dans ce cas une distribution de Dirac comme indiqué sur la figure ci-contre

On notera qu’il est impossible dans le cas d’une onde plane de trouver une distance  $z$  assez grande pour pouvoir faire l’approximation de Fraunöffer puisque l’extension spatiale de cette onde dans le plan  $z = 0$  est infinie.

### 1.7 Ecrans diffractants

Dans une expérience d’optique sur banc, on place divers objets sur le trajet de la lumière : diaphragmes, réseaux, lentilles, prismes, filtres, etc... Ces objets sont caractérisés par un *coefficient de transmission* ou *transmittance*  $t(x, y)$ , défini comme le rapport des amplitudes de l’onde sortante sur l’onde incidente dans les plans d’entrée et de sortie de l’objet. Suivant les conventions de notation précisées par la figure 1.6, l’objet (aussi appelé *écran diffractant* ou *masque*) étant placé dans un plan  $z = 0$  et  $\psi(x, y, z)$  désignant l’amplitude complexe de l’onde, on écrit :

$$t(x, y) = \frac{\psi(x, y, z = 0^+)}{\psi(x, y, z = 0^-)} \tag{1.41}$$

les notations “ $z = 0^-$ ” et “ $z = 0^+$ ” désignent respectivement les plans d’entrée et de sortie du masque. Pour des masques optiquement passifs qui seront les seuls étudiés dans ce cours, on aura toujours

$$|t(x, y)| \leq 1 \tag{1.42}$$

On distingue deux grandes familles d'écrans. Ceux qui n'agissent que sur l'amplitude de l'onde et ceux qui agissent sur sa phase.

### 1.7.1 Ecrans d'amplitude

Dans ce cas  $t(x, y)$  est réel positif et représente la *transparence* du masque. Les filtres, fentes ou diaphragme appartiennent à cette catégorie de masque. On définit une quantité appelée *densité* et qui est définie à partir du logarithme de la transparence :

$$\mathcal{D}(x, y) = -\log_{10} t(x, y) \quad (1.43)$$

ainsi un filtre de densité 4 a un coefficient de transmission constant de  $10^{-4}$ . La figure 1.7 montre quelques exemple de masques d'amplitude avec leur coefficient de transmission associé.

### 1.7.2 Ecrans de phase

Sont concernés les prismes, lentilles, certains types de réseaux de diffraction, les lames de verre, etc... Ce sont généralement des écrans qui

- ont un indice de réfraction dépendant de la position (ex : bulles de gaz, atmosphère turbulente...)
- ont un indice fixe, différent de celui du milieu environnant, et dont l'épaisseur est fonction de la position (ex : prisme ou lentille)

On s'intéressera au second cas dans l'hypothèse où l'épaisseur des écrans est faible (écrans minces).

#### Écriture du coefficient de transmission d'un masque d'épaisseur variable

On se place dans les conditions de la figure 1.8. Le plan d'entrée du masque est le plan  $z = 0$ . La fonction épaisseur du masque est  $e(x, y)$ . Elle est supposée faible (écrans minces) et on supposera aussi qu'on se trouve dans les conditions paraxiales (inclinaisons faibles). Ce masque est éclairé par une onde plane sous incidence normale se propageant dans la direction des  $z > 0$ . On note  $\psi_0$  l'amplitude de l'onde dans le plan  $z = 0$ ,  $\lambda$  sa longueur d'onde et on désigne par  $n$  l'indice du matériau composant le masque. Cet indice est supposé constant. Considérons un point  $M$  situé à la position  $(x, y, 0)$  dans le plan d'entrée du masque. Après propagation dans le matériau, l'onde en sort au point  $M'$  de coordonnées  $(x', y', e)$  à la sortie du masque. Si on néglige les inclinaisons, et puisque  $e$  est faible, les coordonnées transverses de  $M'$  sont les mêmes que celles de  $M$ , c'est à dire  $x' = x$  et  $y' = y$ . L'onde en  $M$  s'écrit :

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0$$

l'onde en  $M'$  s'écrit

$$\psi(x, y, e) = \psi_0 \exp \frac{2i\pi e}{\lambda'}$$

où  $\lambda' = \lambda/n$  est la longueur d'onde de la lumière dans le matériau. Si l'onde s'était propagée librement de  $M$  à  $M'$  en l'absence du masque, son amplitude en  $M'$  aurait été

$$\psi_1(x, y, e) = \psi_0 \exp \frac{2i\pi e}{\lambda}$$

L'effet du masque sur la propagation de l'onde est de transformer  $\psi_1$  en  $\psi$  en introduisant le facteur multiplicatif

$$t(x, y) = \frac{\psi(x, y, e)}{\psi_1(x, y, e)} = \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (n - 1)e(x, y) \right] \quad (1.44)$$

Pour tout  $z > e(x, y)$ , le masque se comporte alors comme un écran plat, situé dans le plan  $z = 0$  et de coefficient de transmission  $t(x, y)$ . On remarque que dans ce cas  $|t(x, y)| = 1$  et que le masque n'agit que sur la phase de l'onde et pas sur son amplitude. D'où le nom d'écran de phase donné à ce type de masque.



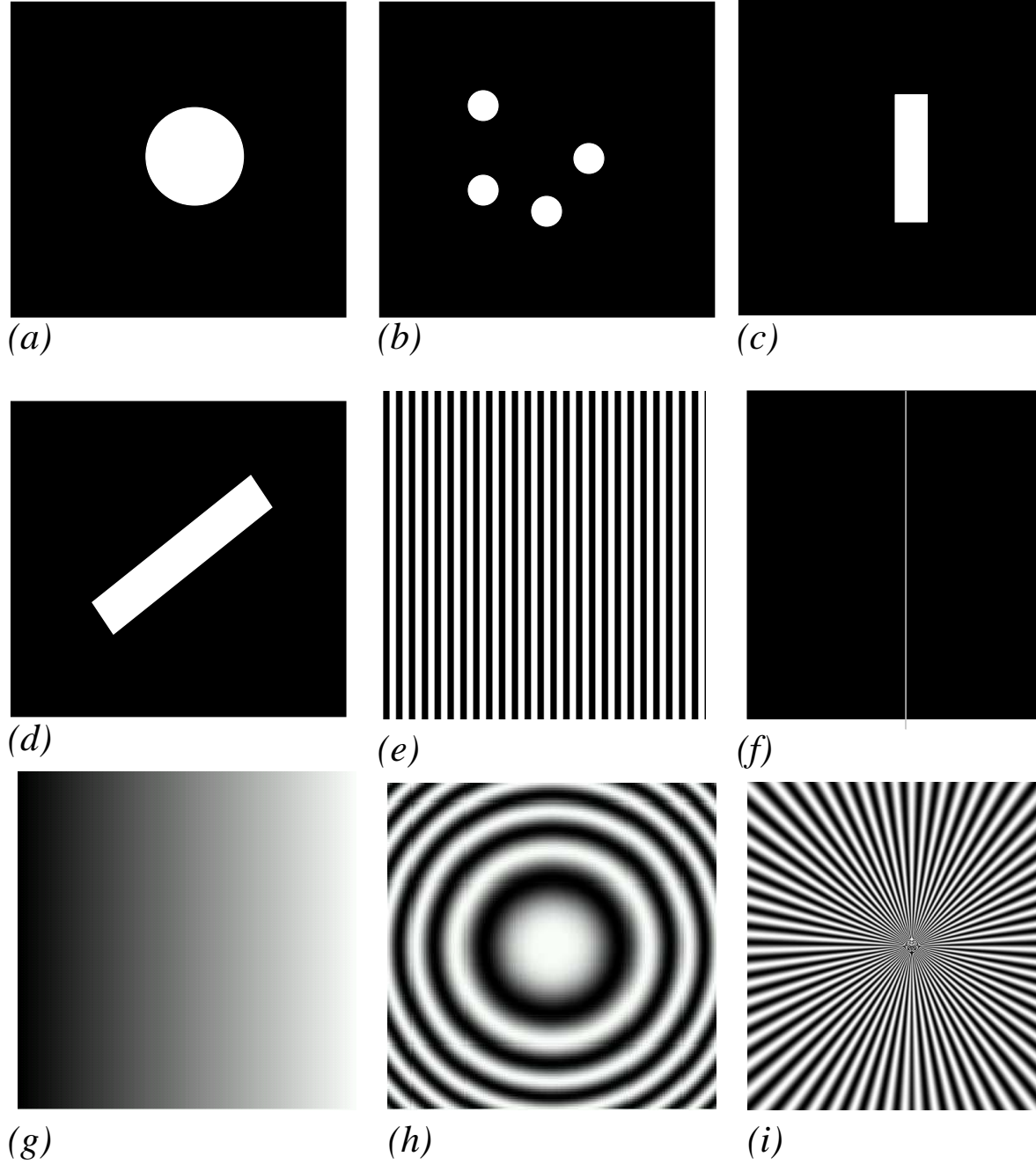


FIGURE 1.7 – Différents masques d'amplitude. Les coefficients de transmission s'écrivent : (a) Trou circulaire de diamètre  $d$  :  $\prod \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d} \right)$ ; (b) Quatre trous identiques situés en  $(x_n, y_n)$  :  $\sum_{n=1}^4 \prod \left( \frac{\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}}{d} \right)$ ; (c) Fente rectangulaire :  $\prod \left( \frac{x}{a} \right) \prod \left( \frac{y}{b} \right)$ ; (d) Fente inclinée d'un angle  $\theta$  sur l'axe  $Ox$  :  $\prod \left( \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{a} \right) \prod \left( \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{b} \right)$ ; (e) Mire de Ronchi périodique :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod \left( \frac{x - na}{a/2} \right)$ ; (f) Fente infinie très fine :  $\delta(x)$ ; (g) gradient linéaire :  $a x$ ; (h) Mire de Soret :  $\cos^2 \left( \pi \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)$ ; (i) Iris :  $\cos^2 \left( \pi \frac{\theta}{a} \right)$  avec  $\theta = \arctan(y/x)$ .

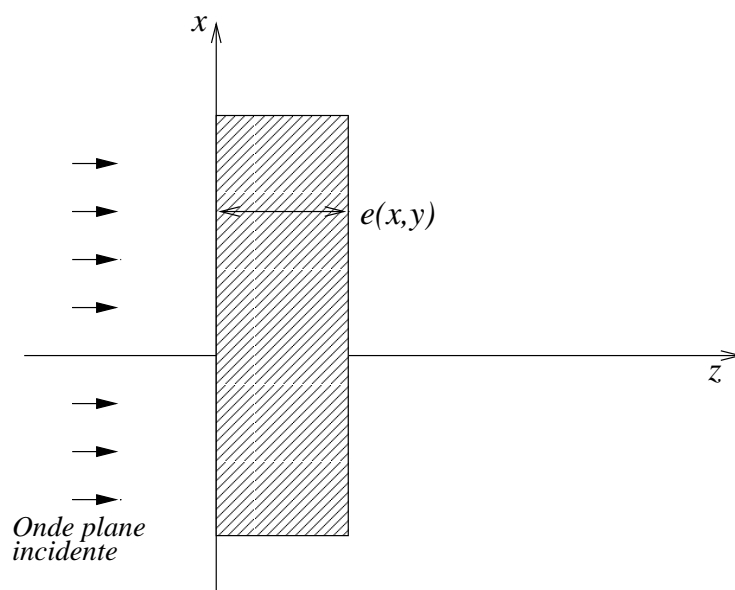


FIGURE 1.8 – Ecran transparent d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e(x, y)$ . Cet écran possède un coefficient de transmission  $t(x, y) = \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (n - 1) e(x, y) \right]$ .

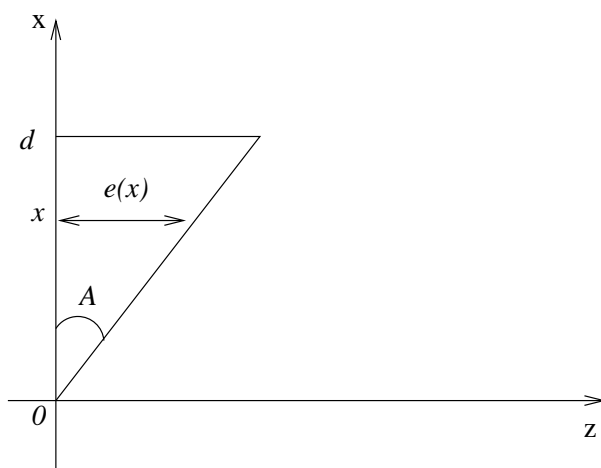


FIGURE 1.9 – Prisme d'angle au sommet  $A$ . L'épaisseur de verre traversée par un rayon arrivant en un point d'abscisse  $x$  est  $e(x) = x \tan A$

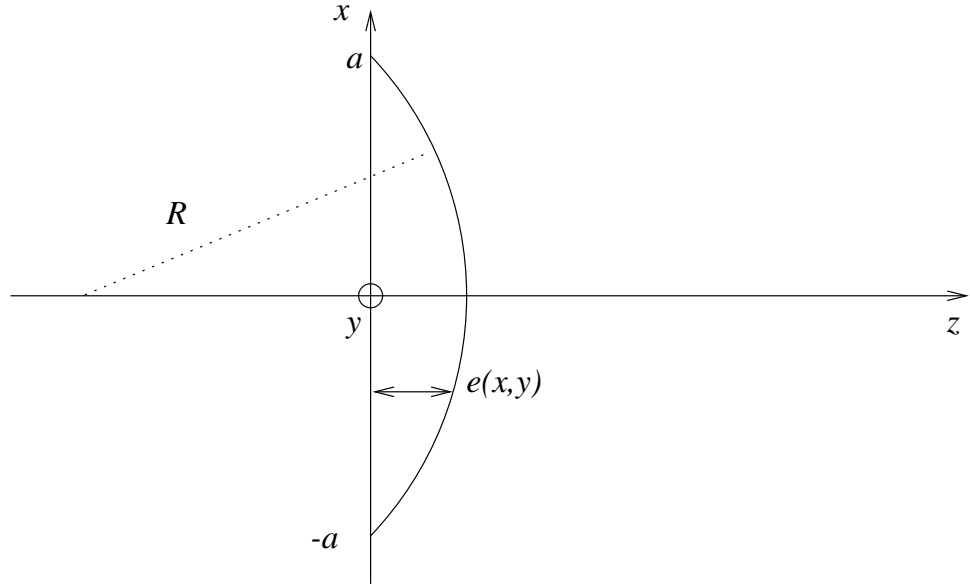


FIGURE 1.10 – Lentille convergente plan-convexe. L'épaisseur de verre traversée par un rayon arrivant en un point de coordonnées  $(x, y)$  dans le plan d'entrée de la lentille est  $e(x, y) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2R}$ .

**Quelques exemples**

**Prisme** On se place dans les conditions de la figure 1.9. Le prisme d'indice  $n$  a un angle au sommet  $A$ . Ce prisme est considéré infini dans la direction  $y$  et de hauteur  $d$  dans la direction  $x$ . L'épaisseur de verre est fonction de  $x$  et s'écrit :

$$e(x) = x \tan A \tag{1.45}$$

et le prisme est limité spatialement entre les valeurs  $x = 0$  et  $x = d$ , on a donc

$$\begin{cases} t(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > d \\ t(x) = \exp \frac{2i\pi}{\lambda} (n - 1)x \tan A & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.46}$$

et on écrit finalement

$$t(x, y) = \prod \left( \frac{x - d/2}{d} \right) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (n - 1)x \tan A \right] \mathbf{I}(y) \tag{1.47}$$

la fonction  $\mathbf{I}(y)$  est la fonction qui vaut 1 quel que soit  $y$ . Son écriture explicite permet d'éviter d'oublier la dépendance en  $y$  lors des calculs (apparition d'un  $\delta(v)$  lors d'une T.F. par exemple).

Dans le cas d'un prisme infini dans la direction  $x$  éclairé sous incidence normale (amplitude  $\psi_0$  dans le plan d'entrée du prisme), l'onde sortant du prisme s'écrit dans le plan  $z = 0$  :

$$\psi(x, y, z = 0^+) = \psi_0 \exp \frac{2i\pi}{\lambda} [(n - 1) \tan A] x$$

c'est l'amplitude d'une onde plane de direction  $(\alpha = (n - 1) \tan A, \beta = 0)$ . On retrouve un résultat connu en optique géométrique (déviation d'une onde plane par un prisme).

**Lentille convergente** On considère le lentille plan-convexe de la figure 1.10, la face plate définissant le plan  $z = 0$ . Le rayon de courbure de la face bombée est  $R$ , le diamètre de la lentille est  $2a$ . On suppose  $2a \ll R$  et on note  $n$  l'indice du verre composant le lentille.

Un point  $M$  appartenant à la surface bombée possède des coordonnées qui vérifient l'équation de la sphère. Le centre de la sphère se trouve en

$$\begin{cases} x_s = 0 \\ y_s = 0 \\ z_s = e(0, 0) - R = e_0 - R \end{cases}$$

et l'équation de la sphère s'écrit :

$$x^2 + y^2 + (z - z_s)^2 = R^2 \quad (1.48)$$

soit

$$z - z_s = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \simeq R - \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (1.49)$$

donc

$$z = e_0 - \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (1.50)$$

et pour trouver  $e_0$  on peut remarquer que lorsque  $x^2 + y^2 = a^2$  l'épaisseur de verre traversée est nulle (on se trouve au bord de la lentille) ; il vient :

$$e_0 = \frac{a^2}{2R} \quad (1.51)$$

la fonction épaisseur  $e(x, y)$  est égale à la coordonnée  $z$  du point  $M$ , d'où le coefficient de transmission de la lentille convergente :

$$t(x, y) = e^{\frac{i\pi a^2(n-1)}{\lambda R}} \exp \left[ -\frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda R} (n-1) \right] \quad (1.52)$$

Le terme constant dépendant de  $a$  traduit le déphasage que subit le rayon passant par l'axe optique à la traversée de la lentille. Souvent on omettra ce terme constant, pour écrire le coefficient de transmission de la lentille convergente comme suit

$$t(x, y) = \exp \left[ -\frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda R} (n-1) \right] \quad (1.53)$$

C'est l'amplitude d'une onde sphérique convergente (signe - dans l'exponentielle) dont le centre se trouve en

$$\begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = 0 \\ z_c = \frac{R}{n-1} \end{cases} \quad (1.54)$$

La distance focale de la lentille est  $F = \frac{R}{n-1}$ . Le nombre  $C = \frac{n-1}{R}$  est appelé *convergence* ou *vergence* de la lentille. Celle-ci a ainsi pour effet de transformer une onde plane en onde sphérique.

Le coefficient de transmission associé à une lentille divergente est obtenu en changeant simplement le signe - par un signe + dans l'équation 1.53. On obtient alors une onde sphérique divergente de focale négative  $F = -\frac{R}{n-1}$ .

**Lentille cylindrique** Il s'agit d'une lentille taillée dans une portion de cylindre (figure 1.11), sa particularité est l'invariance par translation le long de l'axe  $y$  du cylindre. La trace de la lentille dans un plan  $(xz)$  est une portion de cercle comme dans le cas de la lentille sphérique du paragraphe précédent. Le calcul permettant d'établir le coefficient de transmission de cette lentille est le même, la différence étant ici l'invariance par rapport à la variable  $y$ . Tous paramètres égaux par ailleurs, il vient :

$$t(x, y) = e^{\frac{i\pi a^2(n-1)}{\lambda R}} \exp \left[ -\frac{i\pi x^2}{\lambda R} (n-1) \right] \quad (1.55)$$

## 1.8 Figures de diffraction de quelques écrans simples

### 1.8.1 Fente rectangulaire

Soit une fente rectangulaire de largeur  $a$  dans la direction  $x$  et  $b$  dans la direction  $y$ . Cette fente est éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $\psi_0$  dans le plan de la fente. On note  $f_0(x, y)$  l'amplitude de l'onde à la sortie de la fente et  $t(x, y)$  son coefficient de transmission. On a

$$f_0(x, y) = \psi_0 t(x, y) \quad (1.56)$$

avec

$$t(x, y) = \prod \left( \frac{x}{a} \right) \prod \left( \frac{y}{b} \right)$$

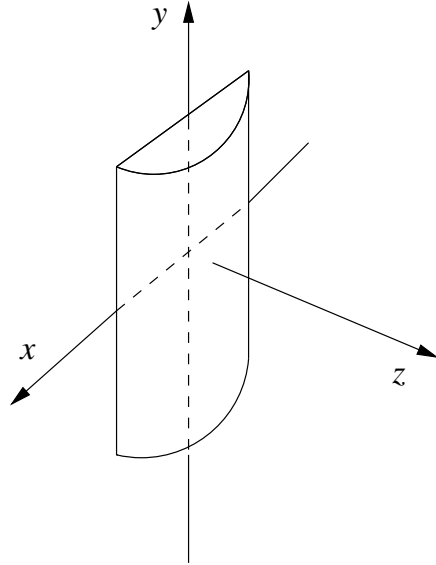


FIGURE 1.11 – Lentille cylindrique convergente. Cette lentille a pour effet de focaliser la lumière d’une onde plane incidente en une ligne fine dans le plan focal.

**Figure de diffraction de Fraunhofer**

L’amplitude observée à une distance  $r$  dans une direction  $(\alpha, \beta)$  s’écrit :

$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \psi_0 \hat{t}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \tag{1.57}$$

avec

$$\hat{t}(u, v) = a b \operatorname{sinc}(\pi u a) \operatorname{sinc}(\pi v b)$$

la définition du sinus cardinal est ici

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

l’amplitude s’écrit alors

$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{a b \psi_0 e^{ikr}}{i\lambda r} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\beta b}{\lambda}\right)$$

et l’intensité

$$I(\alpha, \beta) = \frac{a^2 b^2 |\psi_0|^2}{\lambda^2 r^2} \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{\beta b}{\lambda}\right)$$

Cette fonction est représentée figure 1.12. Il est très facile de l’observer lorsqu’on dispose d’un petit laser en regardant sur un écran placé à quelques dizaines de centimètres de la fente. C’est une fonction qui est maximum en  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ , qui présente un lobe principal entouré de pics secondaires situés en  $(\alpha, \beta) = ((n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{a}, (m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{b})$ . Pour une fente beaucoup plus haute que large, l’aspect de l’intensité est celui d’une ligne pointillée.

Les positions et valeurs des maxima et minima secondaires dans la direction  $\alpha$  associée à la variable  $x$  dans laquelle la taille de la fente est  $a$ , sont donnés dans le tableau suivant :

	$\alpha$	$I(\alpha, 0)/I(0, 0)$
1er zéro	$\lambda/a$	0
1er maximum secondaire	$1.5 \lambda/a$	0.045
2e zéro	$2 \lambda/a$	0
2e maximum secondaire	$2.5 \lambda/a$	0.016
3e zéro	$3 \lambda/a$	0
3e maximum secondaire	$3.5 \lambda/a$	0.008

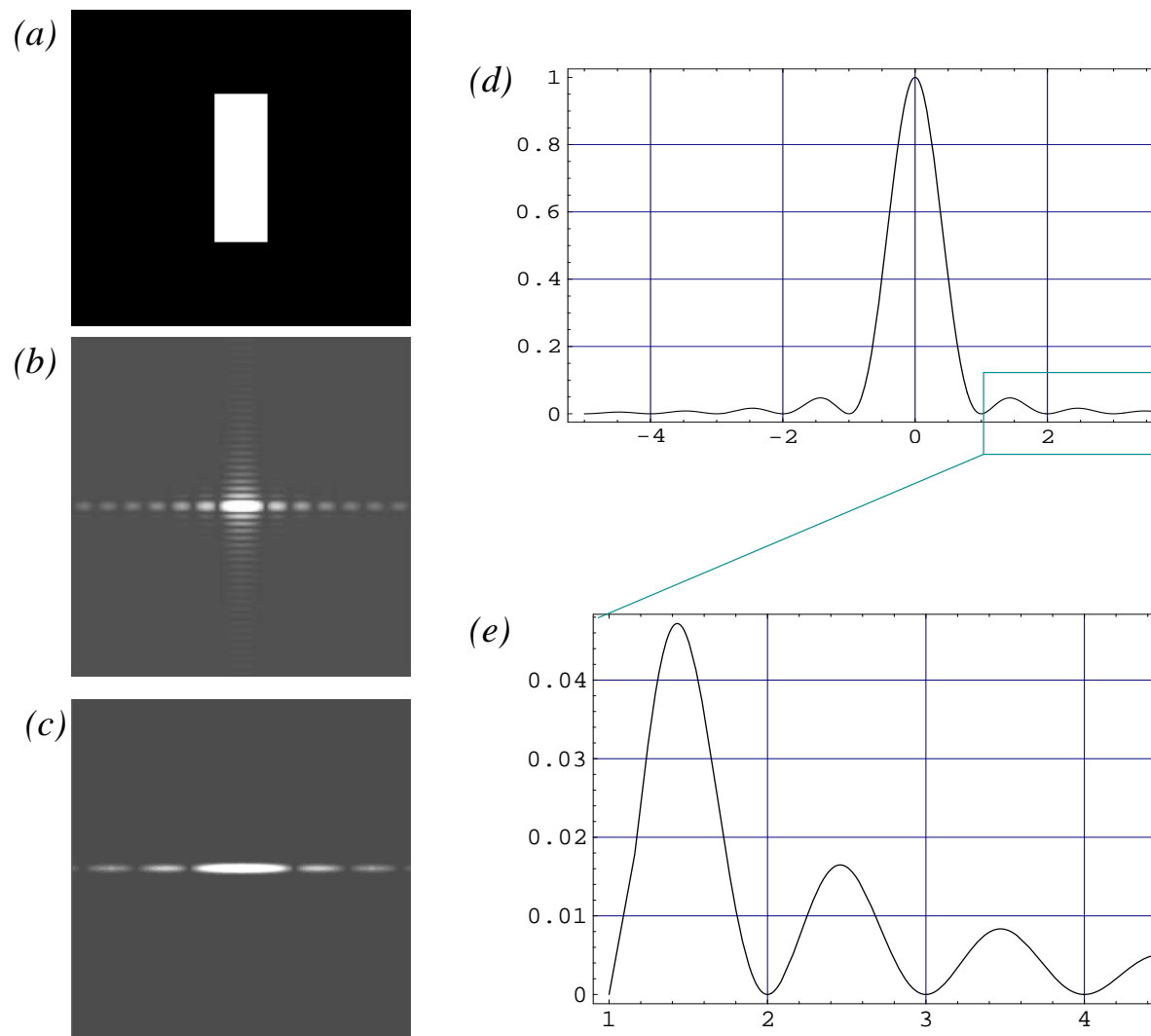


FIGURE 1.12 – Figure de diffraction d’une fente rectangulaire. L’intensité diffractée est décrite par une fonction sinus cardinal carré dans les deux sens (voir le texte). (a) Fente; (b) Figure de diffraction (intensité); (c) Figure de diffraction d’une fente plus fine; (d) Graphe de la fonction  $\text{sinc}^2(\pi x)$ ; (e) Zoom de la courbe (d).

**Taille du lobe principal** Il est donné par la première annulation du sinc. Pour une fente de largeur  $a = 0.1$  mm éclairée à la longueur d'onde  $0.6\mu\text{m}$ , la taille  $\Delta\alpha$  de ce lobe est

$$\Delta\alpha = \frac{2\lambda}{a} = 0.012$$

ce qui donne un angle de 0.7 degrés. On se trouve dans le cadre de l'optique paraxiale.

**Energie contenue dans le lobe principal** Le pourcentage d'intensité lumineuse contenue dans le pic principal est donné par le rapport des intégrales

$$r = \frac{\int_{\alpha=-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}} \int_{\beta=-\frac{\lambda}{b}}^{\frac{\lambda}{b}} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}$$

le calcul numérique de ce rapport avec un ordinateur donne

$$r = 81.5\%$$

le pic principal contient les 4/5 de l'énergie lumineuse. On assimilera souvent pour cette raison la taille de la figure de diffraction (en théorie infinie) à celle de son lobe principal.

### Figure de diffraction de Fresnel de la fente

Avec les valeurs numériques de notre exemple ( $a = 0.1$  mm) l'approximation paraxiale est réalisée. On peut écrire la diffraction de Fresnel à l'aide de la transformée de Fourier-Fresnel. Le calcul fait intervenir des *intégrales de Fresnel*.

La figure 1.13 représente une simulation réalisée à l'aide d'un micro-ordinateur pour différentes valeurs de  $z$ . Remarquer le passage progressif de la forme de la fente (éclairage dans le plan  $z = 0$ ) au sinus cardinal caractéristique de la diffraction à l'infini. L'approximation de Fraunhofer est ici possible, avec les valeurs  $a = 120 \mu$  et  $\lambda = 1 \mu$  pour

$$\left\{ \begin{array}{l} z > 100\pi \frac{a^2}{\lambda} \simeq 4\text{mètres pour une approx. à } 1 \% \\ z > 10\pi \frac{a^2}{\lambda} \simeq 40\text{cm pour une approx. à } 10 \% \end{array} \right.$$

### 1.8.2 Diffraction de Fraunhofer par un trou circulaire

Soit un trou de diamètre  $d$  éclairé sous incidence normale par une onde plane d'amplitude  $\psi_0$  dans le plan  $z = 0$ . L'écran et l'onde incidente sont à symétrie de révolution autour de l'axe optique, la figure de diffraction sera donc aussi à symétrie de révolution.

Posons

- $\vec{\rho} = (x, y)$  les coordonnées cartésiennes d'un point dans le plan du trou
- $(\rho, \phi)$  les coordonnées polaires correspondantes
- $\vec{\omega} = (\alpha, \beta)$  les deux premières composantes d'un vecteur unitaire indiquant une direction dans le plan  $z > 0$
- $(\omega, \gamma)$  les coordonnées polaires correspondantes

L'amplitude diffractée dans la direction  $(\alpha, \beta)$  s'écrit

$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \psi_0 t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

avec ici

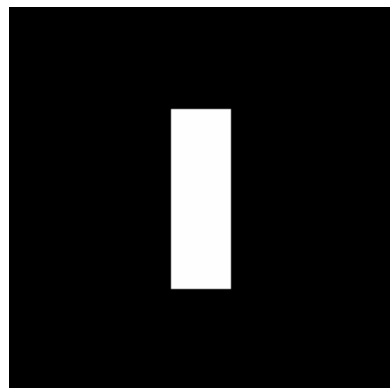
$$t(x, y) = \Pi\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d}\right)$$

donc

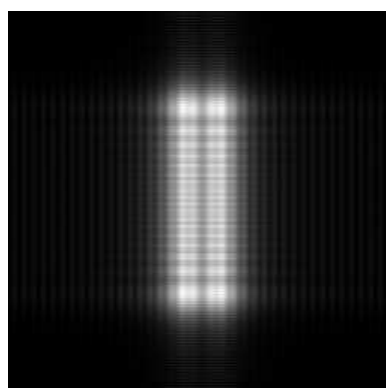
$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \psi_0 \iint_{\text{aire du trou}} \exp\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) dx dy$$

## Diffraction de Fresnel d'une fente rectangulaire

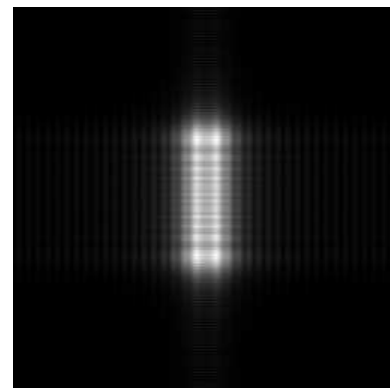
*Longueur d'onde : 1 micron  
Fente de 120x40 microns*



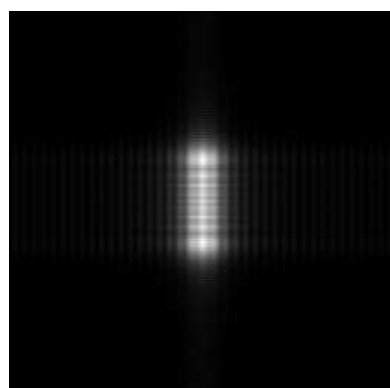
$z=0$



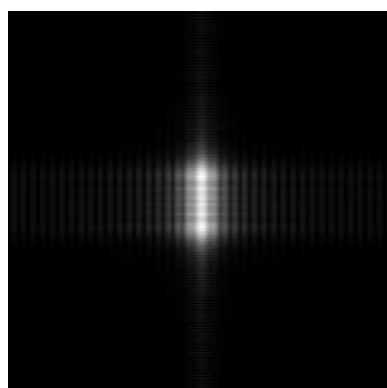
$z=0.2 \text{ mm}$



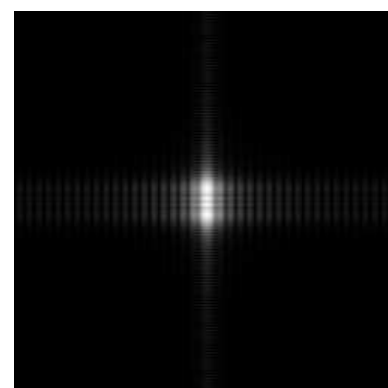
$0.3 \text{ mm}$



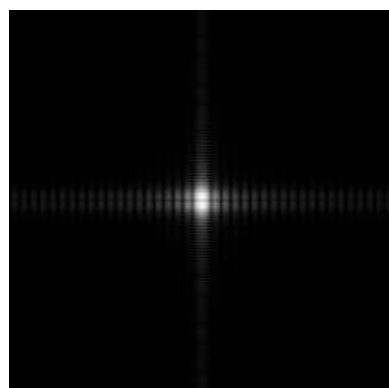
$0.4 \text{ mm}$



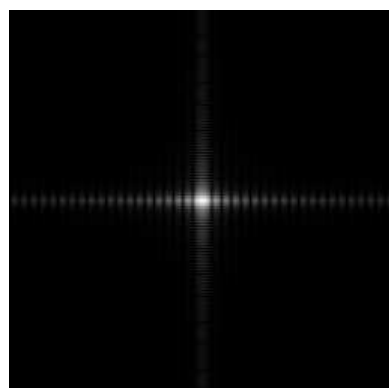
$0.6 \text{ mm}$



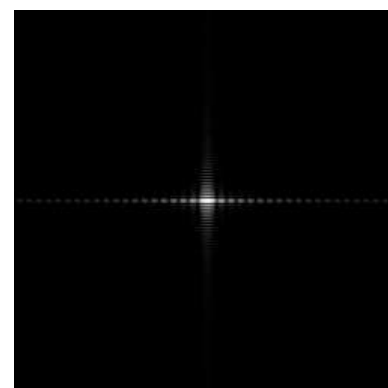
$1 \text{ mm}$



$2 \text{ mm}$



$5 \text{ mm}$



*Infini*

FIGURE 1.13 – Figures de diffraction de Fresnel (intensité) d'une fente rectangulaire pour différentes distances entre le plan de la fente et le plan d'observation.



ou encore

$$f_\infty(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \psi_0 \iint \exp \frac{2i\pi}{\lambda} \vec{\omega} \cdot \vec{\rho} \, dx \, dy$$

passage en polaires :  $dx \, dy \rightarrow \rho \, d\rho \, d\phi$ ,  $\vec{\omega} \cdot \vec{\rho} = \omega \rho \cos(\phi - \gamma)$  et en posant  $\theta = \phi - \gamma$ , il vient

$$f_\infty(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \psi_0 \int_{\rho=0}^{d/2} \rho \, d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{ik\omega \rho \cos(\theta)} \, d\theta$$

Introduisons maintenant la fonction de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} \, d\phi$$

il vient

$$f_\infty(\alpha, \beta) = 2\pi \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \psi_0 \int_{\rho=0}^{d/2} \rho \, J_0(k\omega d) \, d\rho$$

La relation suivante entre les fonctions de Bessel  $J_0$  et  $J_1$

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx} [xJ_1(x)]$$

nous permet d'écrire

$$f_\infty(\alpha, \beta) = \pi d \frac{e^{ikr}}{i\lambda r k\omega} \psi_0 J_1\left(\frac{k\omega d}{2}\right)$$

soit en introduisant la fonction "J<sub>1</sub> cardinal"  $J_{1c}(x) = J_1(x)/x$

$$f_\infty(\alpha, \beta) = 2\psi_0 S \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} J_{1c}\left(\frac{\pi\omega d}{\lambda}\right)$$

L'intensité s'écrit

$$I(\omega) = \frac{4|\psi_0|^2 S^2}{\lambda^2 r^2} J_{1c}^2\left(\frac{\pi\omega d}{\lambda}\right)$$

avec  $\omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sin \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle des coordonnées cylindriques défini au paragraphe 1.1.1. On remarque comme on s'y attendait que l'intensité est à symétrie de révolution autour de  $Oz$ . Cette fonction appelée "fonction d'Airy" est maximum au centre et présente un comportement oscillatoire : la figure bidimensionnelle est une tache brillante entourée d'anneaux noirs et brillants comme on peut le voir sur la figure 1.14. Les rayons angulaires des premiers anneaux et la valeur de l'intensité sur les anneaux brillants sont donnés dans le tableau suivant :

	$\sin \theta$	$I/I(0)$
1er anneau noir	1.22 $\lambda/d$	0
1er anneau brillant	1.63 $\lambda/d$	0.017
2e anneau noir	2.23 $\lambda/d$	0
2e anneau brillant	2.68 $\lambda/d$	0.004
3e anneau noir	3.23 $\lambda/d$	0
3e anneau brillant	3.70 $\lambda/d$	0.0016

La fraction de l'intensité diffractée dans le pic central sur l'intensité diffractée dans tout l'espace est ici de 83.8 % (à comparer à 81.5 % pour une ouverture carrée de côté  $d$ ).

### 1.8.3 Diffraction de Fresnel au foyer d'une lentille convergente

On éclaire une lentille mince convergente par une onde plane arrivant sous incidence normale. L'optique géométrique prévoit qu'une telle lentille focalise la lumière en un point au foyer. Nous allons retrouver ce résultat par la diffraction de Fresnel.

On se place dans l'approximation de l'optique paraxiale,  $z$  est l'axe de la propagation, la lentille est supposée de dimensions transversales infinies. On note

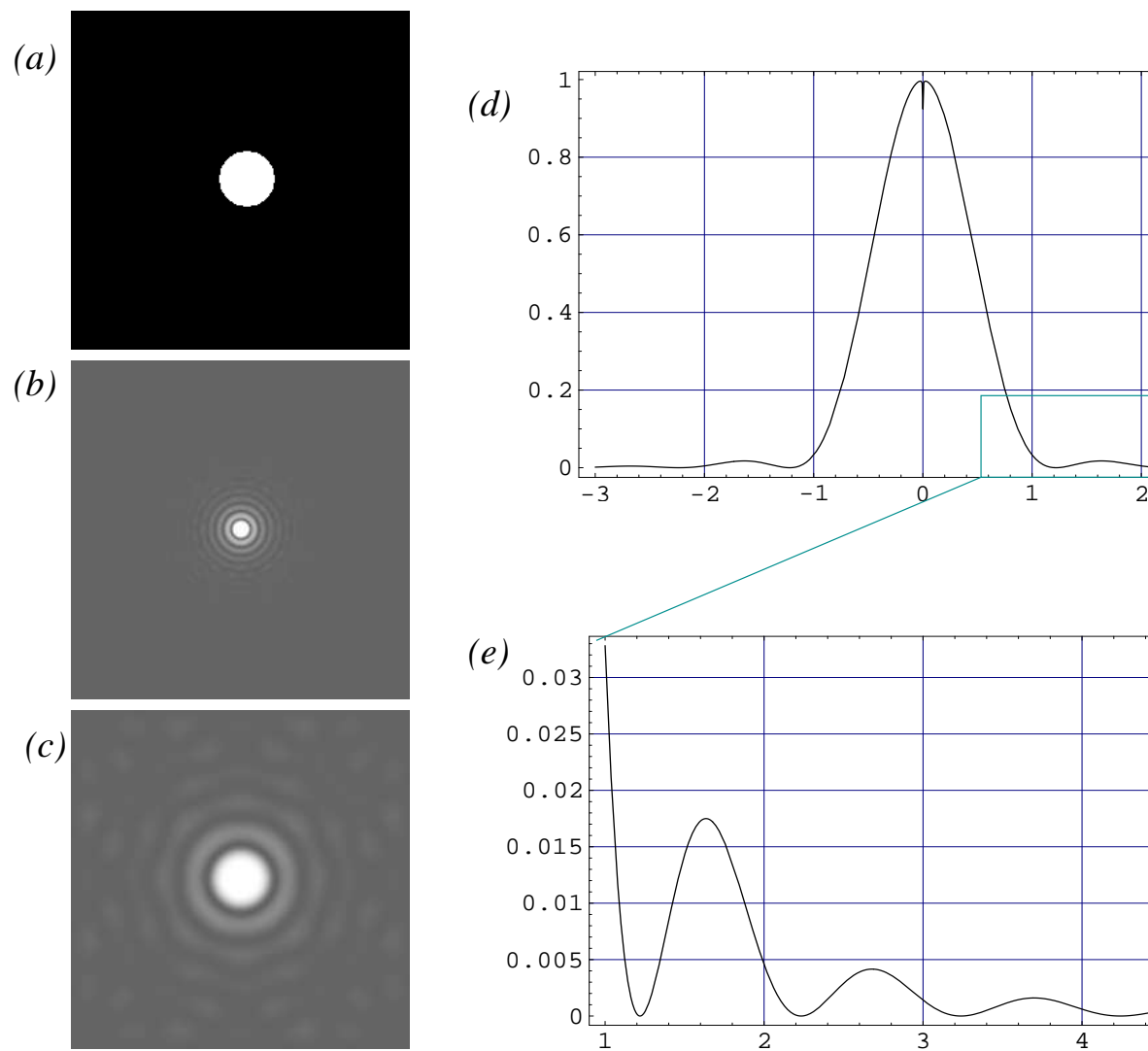


FIGURE 1.14 – Figure de diffraction d’un trou circulaire. L’intensité diffractée est décrite par une fonction  $J_1$  cardinal carré à symétrie de révolution autour de l’axe optique (voir le texte). (a) Trou ; (b) Figure de diffraction (intensité) ; (c) Figure de diffraction d’un trou plus petit ; (d) Graphe de la fonction  $J_{1c}^2(\pi x)$  ; (e) Zoom de la courbe (d).

- $(x', y')$  les coordonnées dans le plan de la lentille ( $z = 0$ )
  - $(x, y)$  les coordonnées dans le plan d'observation
  - $\psi_0$  l'amplitude
  - $R$  et  $n$  le rayon de courbure de la lentille et son indice de réfraction
  - $f_z(x, y)$  l'amplitude dans le plan d'observation
- Le coefficient de transmission de la lentille convergente s'écrit

$$t(x', y') = \exp - \frac{i\pi(n-1)(x'^2 + y'^2)}{\lambda R}$$

l'amplitude après la lentille s'écrit à l'aide de la transformée de Fourier-Fresnel. Il vient

$$f_z(x, y) = \psi_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda z} \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}} \left[ f_0(x', y') \exp \frac{i\pi}{\lambda z} (x'^2 + y'^2) \right]$$

soit

$$f_z(x, y) = \psi_0 \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda z} \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}} \left[ \exp \left( \frac{i\pi}{\lambda} (x'^2 + y'^2) \left( \frac{1}{z} - \frac{n-1}{R} \right) \right) \right]$$

Cette expression est particulièrement simple pour la valeur  $z = \frac{R}{n-1}$  où l'exponentielle vaut 1. L'amplitude s'écrit alors :

$$f_z(x, y) = -i\psi_0 \lambda z e^{ikz} \delta(x, y)$$

Ce qui s'interprète comme un point de lumière extrêmement brillant sur l'axe optique : la lentille concentre toute la lumière incidente dans ce point qui apparait comme le foyer de la lentille. On retrouve ainsi la distance focale, inverse de la convergence

$$F = \frac{R}{n-1} = \frac{1}{C} \tag{1.58}$$

### 1.8.4 Réseaux de diffraction

#### Introduction

Ce sont des masques réguliers composés de la répétition périodique d'un motif dans une ou deux directions. Dans ce cours on ne s'intéressera qu'aux réseaux monodimensionnels, périodiques dans une seule direction ( $x$ ) et infinis dans la direction perpendiculaire ( $y$ ).

Le coefficient de transmission d'un tel objet s'écrit de manière générale

$$t(x) = \sum_{n=1}^N \phi(x - na)$$

où  $\phi(x)$  est le coefficient de transmission du motif,  $N$  est le nombre de motifs, et  $a$  la période. Il existe des réseaux d'amplitude (par exemple traits noirs sur fond transparent comme les mires de Ronchi), de phase (variation périodique de l'épaisseur d'une lame) ou les deux. Des exemples sont donnés dans la figure 1.15.

Comme nous allons le voir plus loin, les réseaux séparent une onde plane incidente en une multitude d'ondes secondaires se propageant dans des directions différentes. Ce principe a été découvert par Rittenhouse en 1785. Les premiers réseaux réalisés par Young en 1801 étaient composés d'enroulement de fil très fin tendu entre deux vis, probablement peu efficaces dans le visible où la entre les fils est grande devant la longueur d'onde. Fraunhofer (1819) réalisa quand à lui des réseaux à base de fins rubans d'or déposés sur une plaque de verre. Mais c'est à Rowland que l'on doit le principe de réalisation par gravage d'une lame de verre par une pointe en diamant (1882) qui a permis la première production en série de réseaux de diffraction.

**Réseaux par réflexion** De loin les plus utilisés de nos jours, les réseaux par réflexion sont des surfaces de verres gravées (quelques centaines de traits par millimètre pour des réseaux fonctionnant dans le visible) puis aluminées ou argentées. Ces réseaux se comportent comme des miroirs et présentent l'avantage d'éviter la traversée du verre et d'altérer l'onde par les éventuels défauts du matériau. Ils sont aussi plus faciles à fabriquer par réplique de réseaux existants.

Un réseau par réflexion est caractérisé par son coefficient de réflexion  $r(x, y)$  périodique. Comme pour les réseaux par transmission on distingue deux familles :

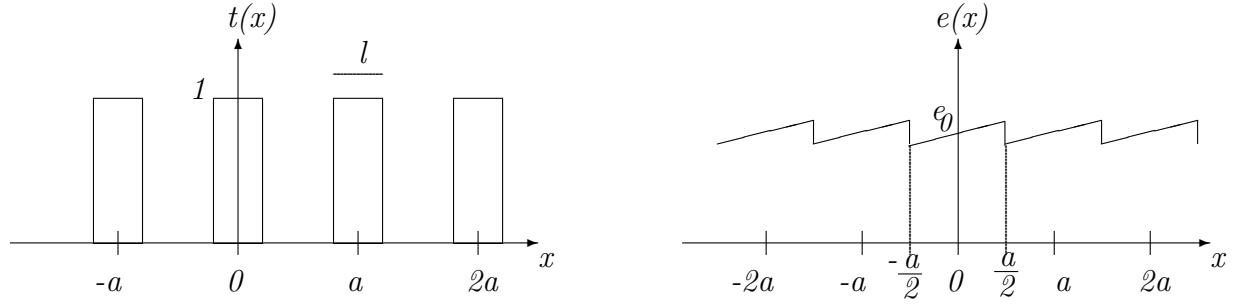


FIGURE 1.15 – Deux exemples de réseaux de diffraction. A gauche un réseau d’amplitude formé de traits transparents de largeur  $l$  équidistants de  $a$ . Le coefficient de transmission de ce réseau s’écrit  $t(x) = \sum_n \Pi\left(\frac{x-na}{l}\right)$ . Le réseau de droite est un réseau de phase formé d’une lame de verre d’épaisseur périodiques (petites dents de scie d’angle au sommet  $\alpha$ ). Le coefficient de transmission du motif de réseau s’écrit  $\phi(x) = \Pi(x/a) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(n-1)(e_0 + \alpha x)\right)$ .

- $r(x, y)$  réel : exemple de traits opaques sur une surface réfléchissante
- $r(x, y)$  complexe : exemple du réseau à profil en dents de scie de l’exemple de la figure 1.15 : l’épaisseur d’air traversée entre l’onde incidente et l’onde réfléchi est une fonction périodique.

**Diffraction à distance finie par un réseau infini**

On s’intéresse à un réseau par transmission périodique dans la direction  $x$ , invariant par translation dans la direction  $y$ , infini dans les deux directions  $x$  et  $y$ . Son coefficient de transmission s’écrit comme la périodisée de son motif

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x - na)$$

Ce réseau, placé dans le plan  $z = 0$  est éclairé par une onde plane monochromatique arrivant sous incidence oblique et s’écrivant

$$\psi(x, y, z < 0) = \psi_0 \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha_0 x + \gamma_0 z)\right)$$

A la sortie du réseau, l’onde s’écrit

$$f_0(x, y) = \psi(x, y, z < 0^+) = \psi_0 e^{\frac{2i\pi\alpha_0 x}{\lambda}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x - na)$$

L’utilisation de la formule sommatoire de Poisson (développement en série de Fourier de la fonction  $t(x, y)$ ) va permettre de faire apparaître que  $f_0(x, y)$  est une somme d’ondes planes se propageant dans des directions différentes. En effet,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x - na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

d’où

$$f_0(x, y) = \frac{\psi_0}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\left(\alpha_0 + n\frac{\lambda}{a}\right)x\right)$$

On reconnaît ici l’écriture dans le plan  $z = 0$  d’une somme discrètes d’ondes planes de se propageant dans les directions

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_0 + n\frac{\lambda}{a} \\ \beta_n &= 0 \end{aligned}$$

et d’amplitudes  $\psi_{0n} = \frac{\psi_0}{a} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right)$ . Une plane onde incidente est ainsi transformée en une multitude d’ondes planes secondaires secondaires. Il est remarquable de constater que les directions de propagation de ces ondes secondaires ne sont fonction de la période du réseau alors que leurs amplitudes ne dépendent que de la forme du motif.

Il est facile, à partir de l'expression précédente, d'écrire l'amplitude dans un plan  $z > 0$  quelconque, il suffit de propager chaque onde plane comme expliqué au paragraphe 1.4. Le vecteur d'onde associé à chaque onde plane de la somme s'écrit

$$\vec{k}_n = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{vmatrix} \alpha_n \\ 0 \\ \gamma_n \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2}$$

D'où l'expression de l'onde

$$\psi(x, y, z \geq 0) = \frac{\psi_0}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \exp \frac{2i\pi}{\lambda} \left[ \left(\alpha_0 + n \frac{\lambda}{a}\right)x + \gamma_n z \right]$$

Notons que cette expression est valable aussi bien en optique paraxiale que non paraxiale.

### Ordre d'interférence

C'est le nombre "n", indice de la somme, qui caractérise la direction de propagation  $\alpha_n$ . On parle d'"ordre n". La déviation subie par l'onde à l'ordre n s'exprime par la formule dite "formule des réseaux" :

$$\boxed{\sin \theta_n - \sin \theta_0 = n \frac{\lambda}{a}} \quad (1.59)$$

où  $\alpha_n = \sin \theta_n$ . On constate qu'une partie de la lumière incidente n'est pas déviée (ordre 0), les ordres suivants se partageant l'énergie lumineuse restante.

**Ordres de grandeur** Un réseau classique dans le visible possède  $\simeq 500$  traits/mm soit  $a = 2 \mu$ . Prenons  $\lambda = 600$  nm et  $\theta_0 = 0$  (incidence normale), il vient les déviations suivantes :

n	$\theta_n$
0	0
1	17°
2	37°
3	64°
4	—

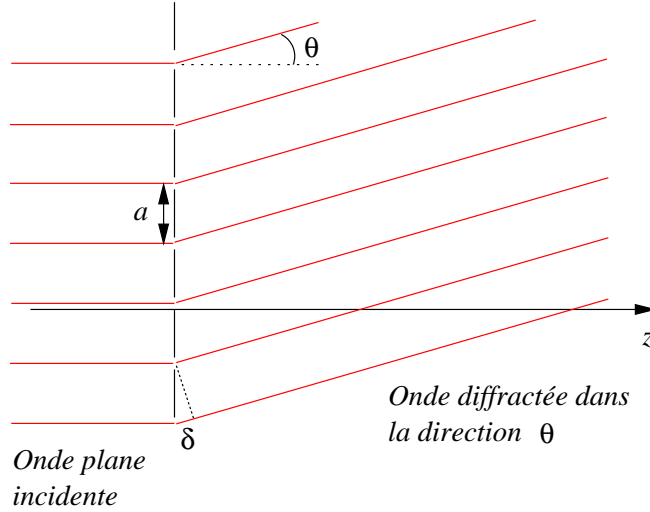
### Quelques remarques

1. Les angles sont grands, on n'est généralement pas en optique paraxiale
2. Des longueurs d'ondes différentes sont déviées dans des directions différentes. En lumière blanche, on observe des couleurs.
3. Il existe un ordre maximum car  $\sin \theta_n$  ne peut pas être plus grand que 1. On aura toujours

$$n < \frac{\lambda}{a}$$

4. On n'observe que l'ordre 0 si la période du réseau est plus petite que la longueur d'onde

**Signification physique des ordres** Considérons le schéma suivant dans lequel le réseau est formé de petites fentes équidistantes et éclairé sous incidence normale.



La différence de marche entre deux ondes provenant de deux fentes voisines est égale à

$$\delta = a \sin \theta$$

On ne voit de la lumière que dans les directions où les interférences sont constructives, donc pour les directions  $\theta_n$  telles que

$$\delta = a \sin \theta_n = n\lambda$$

On retrouve la “formule des réseaux” donnant la déviation de l’ordre  $n$ .

On peut aussi expliquer avec ce petit dessin pourquoi l’ordre maximum observable est  $\frac{\lambda}{a}$  : c’est tout simplement parce que la différence de marche maximale entre deux ondes successives, obtenue quand l’onde émergente se propage verticalement ( $\theta = \pi/2$ ), est égale à la distance inter-fentes  $a$ .

**Diffraction à l’infini**

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, l’onde à la sortie du réseau s’écrit

$$f_0(x, y) = \frac{\psi_0}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \exp \frac{2i\pi}{\lambda} \left(\alpha_0 + n \frac{\lambda}{a}\right) x$$

l’amplitude diffractée dans une direction  $(\alpha, \beta)$  s’écrit

$$f_\infty(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \hat{f}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

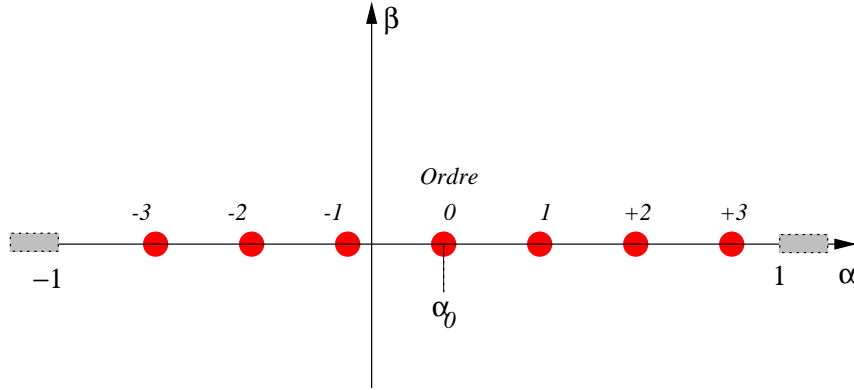
le calcul donne alors

$$f_\infty(\alpha, \beta) = \frac{\lambda\psi_0}{a} \frac{e^{ikr}}{ir} \delta(\beta) \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \delta\left(\alpha - \left(\alpha_0 + n \frac{\lambda}{a}\right)\right)$$

L’intensité s’écrit :

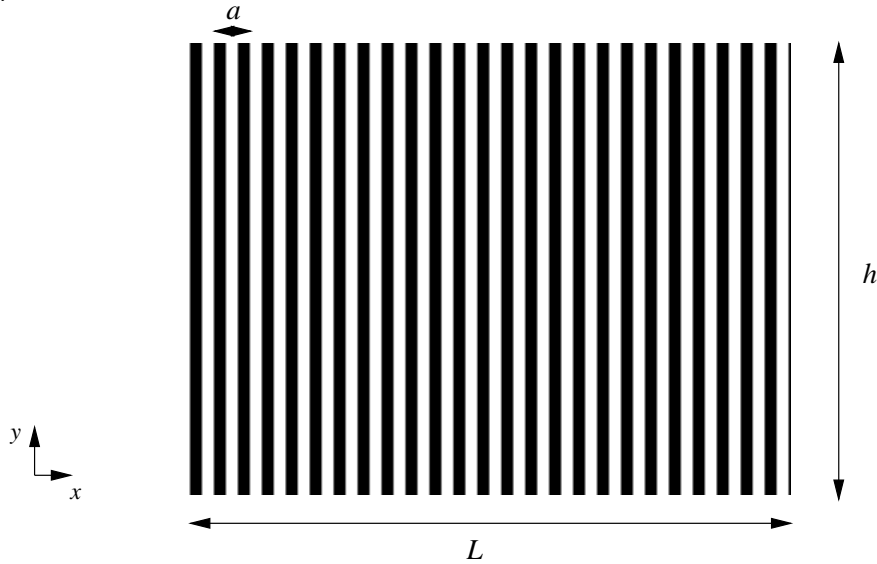
$$I(\alpha, \beta) = \text{Cte} \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \right|^2 \delta\left(\alpha - \left(\alpha_0 + n \frac{\lambda}{a}\right)\right) \delta(\beta)$$

La représentation de cette fonction (figure ci-après) dans le plan  $(\alpha = \sin \theta_x, \beta = \sin \theta_y)$  fait apparaître une série de points lumineux de luminosité pondérée par  $\left| \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \right|^2$  correspondant aux ordres. La figure est écrasée sur la droite  $\beta = 0$ , l’ordre 0 est observé pour la direction  $\alpha = \alpha_0$ .



**Réseaux de taille finie — Pouvoir de résolution**

Les réseaux réels ne sont bien sûr pas infinis dans les deux directions, ils sont généralement gravés sur des plaques de verre ou sur des films plastiques (réseaux photographiques), leur dimension typique est de quelques centimètres :



Le nombre total de traits,  $N = L/a$  est de l'ordre de quelques milliers à quelques dizaines de milliers. Le coefficient de transmission du réseau de taille finie s'écrit en multipliant celui du réseau infini par des fonctions portes assurant la limitation spatiale :

$$t(x, y) = \Pi\left(\frac{x}{L}\right) \Pi\left(\frac{y}{h}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x - na)$$

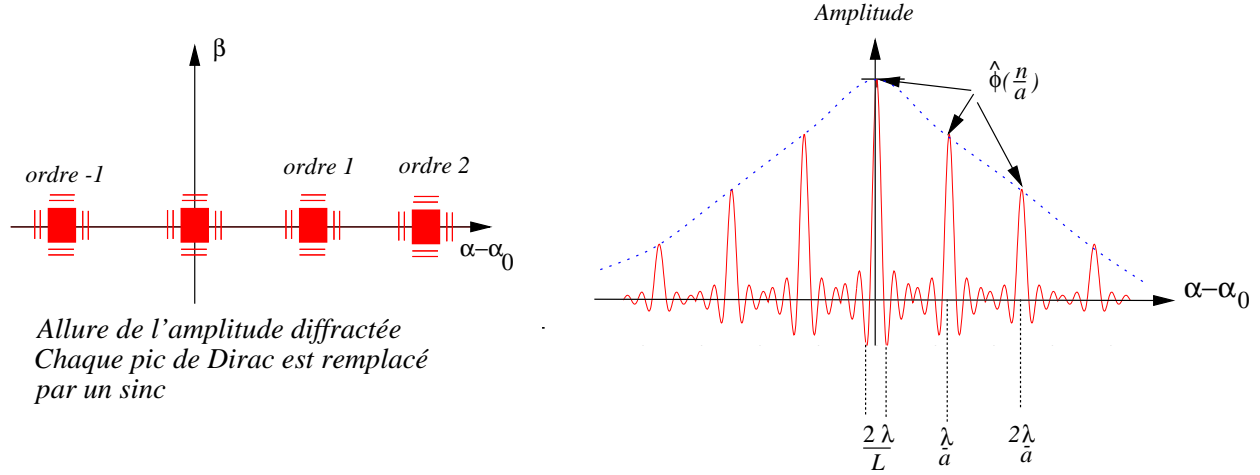
La nouvelle amplitude diffractée à l'infini s'écrit alors comme la convolution :

$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda\psi_0}{a} \frac{e^{ikr}}{ir} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \left[ \delta\left(\alpha - \left(\alpha_0 + n\frac{\lambda}{a}\right)\right) \cdot \delta(\beta) \right] * hL \left[ \text{sinc}\left(\frac{\pi\alpha L}{\lambda}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right) \right]$$

Soit en réarrangeant les termes et en utilisant les propriété  $f(x)*\delta(x-a) = f(x-a)$  et  $f(x)\delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$

$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{hL\lambda\psi_0 e^{ikr}}{iar} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi L}{\lambda} \left(\alpha - \alpha_0 - n\frac{\lambda}{a}\right)\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)$$

Comparons cette expression à celle qui correspond au réseau infini : on constate que tous les pics de Dirac ont été remplacés par des sinc qui correspondent à la figure de diffraction du rectangle de limitation spatiale  $\Pi\left(\frac{x}{L}\right)\Pi\left(\frac{y}{h}\right)$ . L'ensemble a grossièrement l'allure suivante :



**Ecriture de l'intensité** Elle est le module carré de l'amplitude complexe de l'expression précédente, on a donc formellement

$$I(\alpha, \beta) = \frac{h^2 L^2 \lambda^2 |\psi_0|^2}{a^2 r^2} \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi L}{\lambda} \left(\alpha - \alpha_0 - n \frac{\lambda}{a}\right)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \beta h}{\lambda}\right) \right|^2$$

Posons  $I_0 = \frac{h^2 L^2 \lambda^2 |\psi_0|^2}{a^2 r^2}$ , le développement du carré fait apparaître des termes carrés et des termes de type double-produit :

$$I = I_0 \left( \sum_n \text{termes carrés} + 2 \sum_n \sum_{n \neq m} \text{produits entre termes croisés} \right)$$

On va se placer dans le cas (assez courant) où la taille du réseau est grande devant sa période, soit  $L \gg a$ . Sous cette hypothèse, la largeur des ordres  $\frac{2\lambda}{L}$  est petite devant leur distance  $\frac{\lambda}{a}$  (non-recouvrement entre deux ordres successifs). Dans ce cas les termes croisés de la somme ci-dessus sont quasiment nuls (produits entre amplitudes provenant d'ordres différents  $n \neq m$ ) et on peut écrire :

$$I(\alpha, \beta) \simeq I_0 \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}\left(\frac{n}{a}\right)|^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L}{\lambda} \left(\alpha - \alpha_0 - n \frac{\lambda}{a}\right)\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \beta h}{\lambda}\right)$$

**Pouvoir de résolution** Imaginons que le réseau soit éclairé avec deux ondes planes monochromatiques de longueurs d'onde voisines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  arrivant toutes les deux sous la même incidence.

– Pour la longueur d'onde  $\lambda_1$ , le réseau diffracte une somme d'ondes planes dans des directions

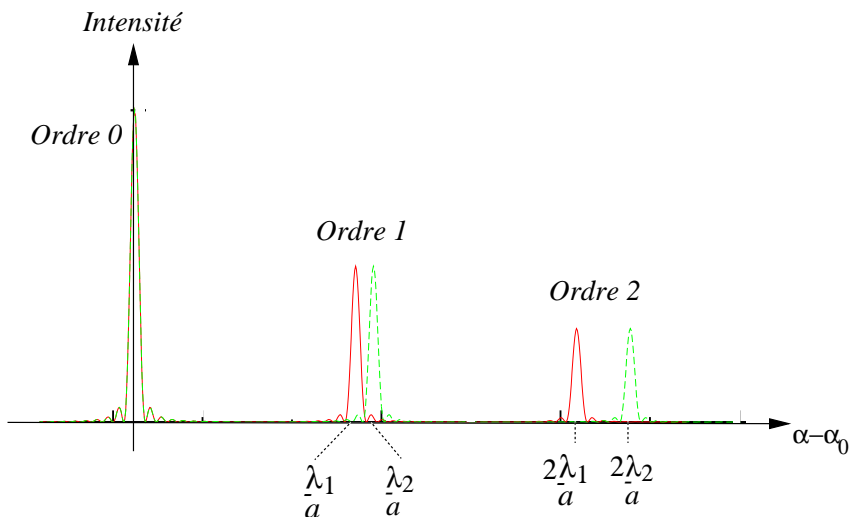
$$\alpha_{n1} = \alpha_0 + n\lambda_1/a$$

– Pour la longueur d'onde  $\lambda_2$ , les ondes sont diffractées dans des directions

$$\alpha_{n2} = \alpha_0 + n\lambda_2/a$$

Deux vibrations de fréquences différentes sont incohérentes entre elles et ce sont les deux intensités de chaque figure de diffraction qui s'ajoutent pour donner un graphe à l'allure suivante présentant un dédoublement de chaque ordre (sauf l'ordre zéro) :

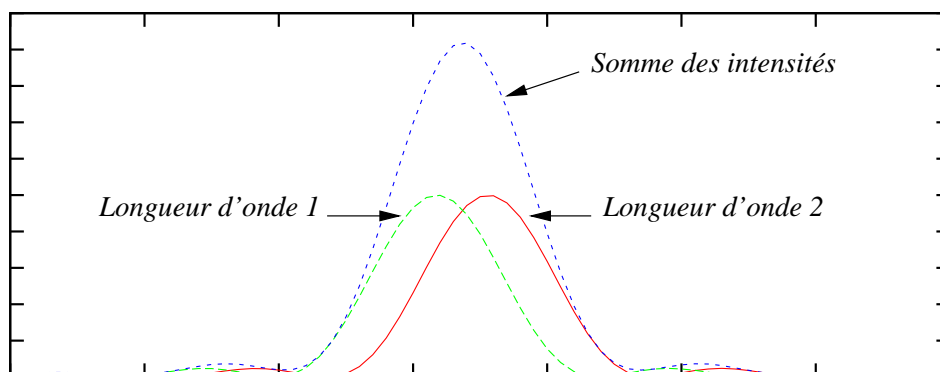




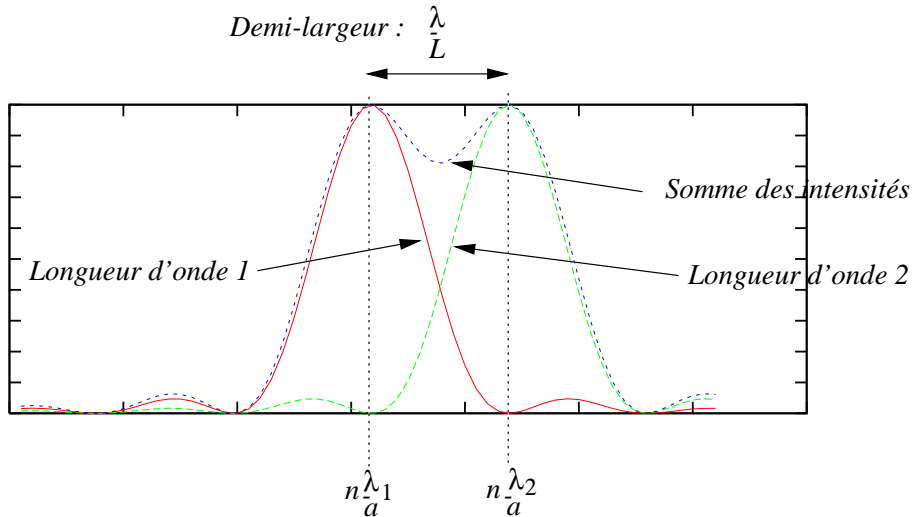
L'écart  $\Delta\alpha$  entre les deux pics correspondants à l'ordre  $n$  vaut

$$\Delta\alpha = n \frac{\delta\lambda}{a}$$

si  $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ . Si cette distance est inférieure à la demi-largeur  $\lambda/a$  de l'ordre, on n'observera qu'un seul pic comme illustré par la figure suivante



On dit alors que le réseau n'est pas capable de "séparer" les deux longueurs d'onde dans l'ordre  $n$ . Le cas critique à partir duquel les deux pics sont détachés est obtenu lorsque la séparation entre les pics est égale à la demi-largeur. Dans ce cas le maximum du pic correspondant à  $\lambda_1$  tombe sur le premier zéro du pic correspondant à  $\lambda_2$  :



on dit alors que l'écart minimal entre deux longueurs d'onde que le réseau est capable de séparer à l'ordre  $n$  vaut

$$\delta\lambda = \frac{a\lambda}{nL}$$

et on définit le *pouvoir de résolution* du réseau comme

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{nL}{a} \tag{1.60}$$

Soit le produit de l'ordre par le nombre de traits du réseau. Les valeurs courantes sont de quelques milliers à quelques dizaines de milliers.

**Exemple d'application** On veut résoudre le doublet du Sodium,  $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ ; quel doit être le pouvoir de résolution? Si on utilise à l'ordre 1 un réseau de 100 traits/mm, quelle doit être sa taille?

→ L'écart  $\delta\lambda$  est ici de  $6 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont voisins de  $6000 \text{ \AA}$ , donc la résolution nécessaire est de

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \simeq 1000$$

→ Pour un réseau de 100 traits/mm ( $a = 0.01 \text{ mm}$ ) à l'ordre 1, la taille nécessaire est de

$$L = aR = 10 \text{ mm}$$

**Autre exemple** On utilise un spectroscopie à réseau pour mesurer la vitesse radiale des étoiles doubles. Avec un réseau de résolution 60 000 dans l'ordre 1, quelle vitesse minimum peut-on mesurer?

→ L'écart en longueur d'onde des spectres des deux étoiles est une conséquence de l'effet Doppler. Si  $v_r$  est la différence de vitesse radiale des deux étoiles, alors le décalage Doppler entre les deux spectres sera de

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

→ Avec un réseau de résolution  $R$ , la vitesse radiale minimale accessible sera donc de

$$v_r = c \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{c}{R} = 5 \text{ km/s}$$