

Chapitre 2

Filtrage en lumière cohérente

2.1 Diffraction de Fraunhofer au foyer d'une lentille convergente

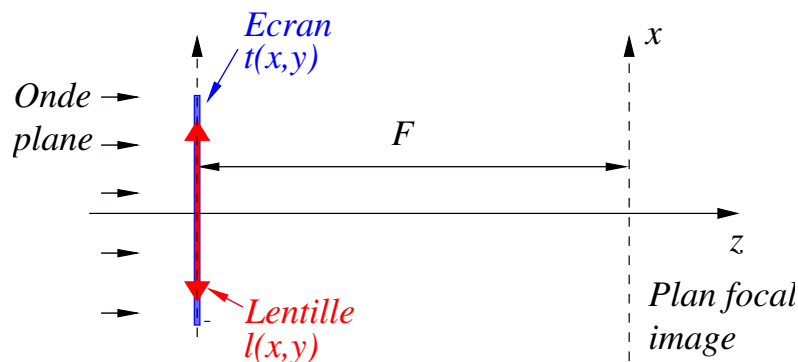
La diffraction de Fraunhofer est séduisante par sa capacité à produire instantanément des transformées de Fourier bidimensionnelles. Le problème reste la distance, une centaine de mètres pour des écrans diffractants d'une taille d'une fraction de millimètre. La solution à ce problème consiste à interposer une lentille convergente sur le trajet de l'onde et d'observer au foyer. Nous allons montrer que la lentille permet d'effectuer une transformée de Fourier optique comme la diffraction à l'infini.

Pour l'ensemble de ce chapitre nous ferons les hypothèses suivantes :

- On se place en optique paraxiale
- L'éclairage est monochromatique

2.1.1 Ecran diffractant accolé à une lentille infinie

On réalise le montage suivant :



Un écran diffractant de coefficient de transmission $t(x, y)$ est placé dans le même plan qu'une lentille convergente de focale F . Ce plan est pris comme origine des z . L'éclairage se fait par une onde plane sous incidence normale, d'amplitude ψ_0 dans le plan $z = 0$.

Posons $\rho^2 = x^2 + y^2$. Le coefficient de transmission de la lentille s'écrit

$$l(x, y) = \exp\left(-\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right)$$

l'amplitude de l'onde à la sortie de l'ensemble écran+lentille s'écrit

$$f_0(x, y) = \psi_0 t(x, y) l(x, y)$$

Faisons une transformée de Fourier-Fresnel pour avoir l'amplitude à la distance $z = F$:

$$f_F(x, y) = \frac{e^{ikF}}{i\lambda F} \psi_0 \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right) \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}} \left\{ t(x', y') l(x', y') \exp\left(\frac{i\pi\rho'^2}{\lambda F}\right) \right\}$$

où $\rho^2 = x^2 + y^2$. Ceci se simplifie en

$$f_F(x, y) = \frac{e^{ikF}}{i\lambda F} \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right) \hat{f}_0\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right) \quad (2.1)$$

l'intensité s'écrit

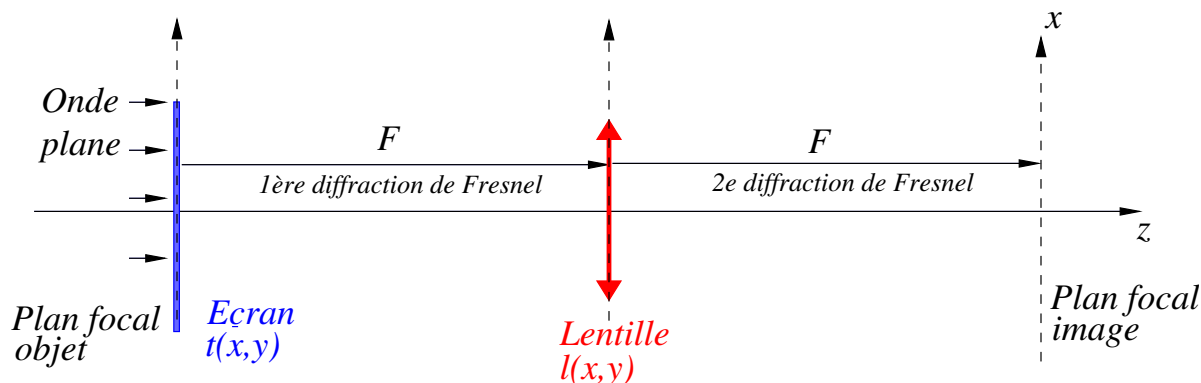
$$I_F(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \left| \hat{f}_0\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right) \right|^2 \quad (2.2)$$

Ainsi, au foyer de la lentille, l'intensité est proportionnelle au carré du module de la transformée de Fourier de l'amplitude complexe dans le plan d'entrée de la lentille. On retrouve la propriété de transformation de Fourier optique caractéristique de la diffraction à l'infini.

L'amplitude complexe est par contre affectée d'un terme de phase quadratique. Il est sans importance pour l'observation de la figure de diffraction (détecteurs sensibles à l'intensité) mais peut s'avérer gênant si on souhaite travailler sur la phase de l'onde au foyer. La solution pour éliminer ce terme de phase consiste à placer l'écran diffractant au foyer objet de la lentille comme discuté dans le paragraphe suivant.

2.1.2 Ecran diffractant au foyer objet d'une lentille

Le montage optique est cette fois le suivant :



- Amplitude de l'onde incidente dans le plan de l'objet (origine des z) : ψ_0
- Après la traversée de l'écran : $f_0(x, y) = \psi_0 t(x, y)$
- Propagation sur une distance F : $\psi(x, y, z = F^-) = e^{ikF} f_0(x, y) * h(x, y)$, où $h(x, y)$ est la réponse impulsionnelle de la propagation

$$h(x, y) = \frac{1}{i\lambda F} \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right)$$

- Traversée de la lentille

$$f_F(x, y) = e^{ikF} l(x, y) \cdot [f_0(x, y) * h(x, y)]$$

- Nouvelle propagation sur une distance F , on l'écrit cette fois en utilisant la transformée de Fourier-Fresnel :

$$f_{2F}(x, y) = \frac{e^{2ikF}}{i\lambda F} \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right) \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}} \left\{ l(x', y') \cdot [f_0(x', y') * h(x', y')] \exp\left(\frac{i\pi\rho'^2}{\lambda F}\right) \right\}$$

ce qui se simplifie en

$$f_{2F}(x, y) = \frac{e^{2ikF}}{i\lambda F} \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right) \hat{f}_0\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right) \hat{h}\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right)$$

mais comme $\hat{h}(u, v) = \exp(-i\pi\lambda F(u^2 + v^2))$, l'amplitude complexe dans le plan focal image s'écrit simplement

$$f_{2F}(x, y) = \frac{e^{2ikF}}{i\lambda F} \hat{f}_0\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right) \quad (2.3)$$

et l'intensité

$$I_{2F}(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \left| \hat{f}_0\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right) \right|^2 \quad (2.4)$$

Cette fois, l'amplitude complexe dans le plan focal image est à une constante près la transformée de Fourier exacte de l'amplitude dans le plan focal objet. Ce résultat remarquable permet de réaliser des expériences de filtrage optique.

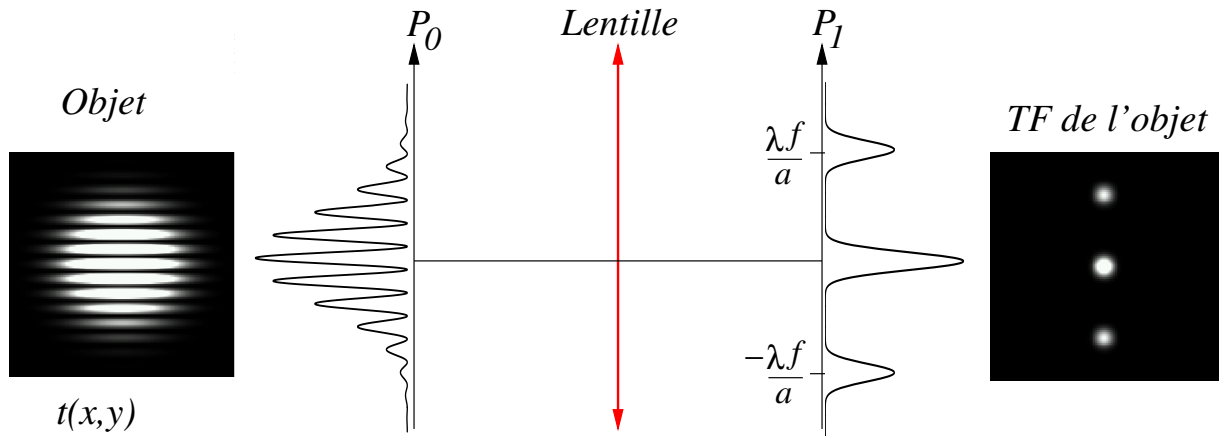
2.2 Le filtrage optique

2.2.1 Approche heuristique

On utilise le montage du paragraphe précédent en plaçant dans le plan focal objet P_0 un masque dont le coefficient de transmission est une gaussienne striée de franges :

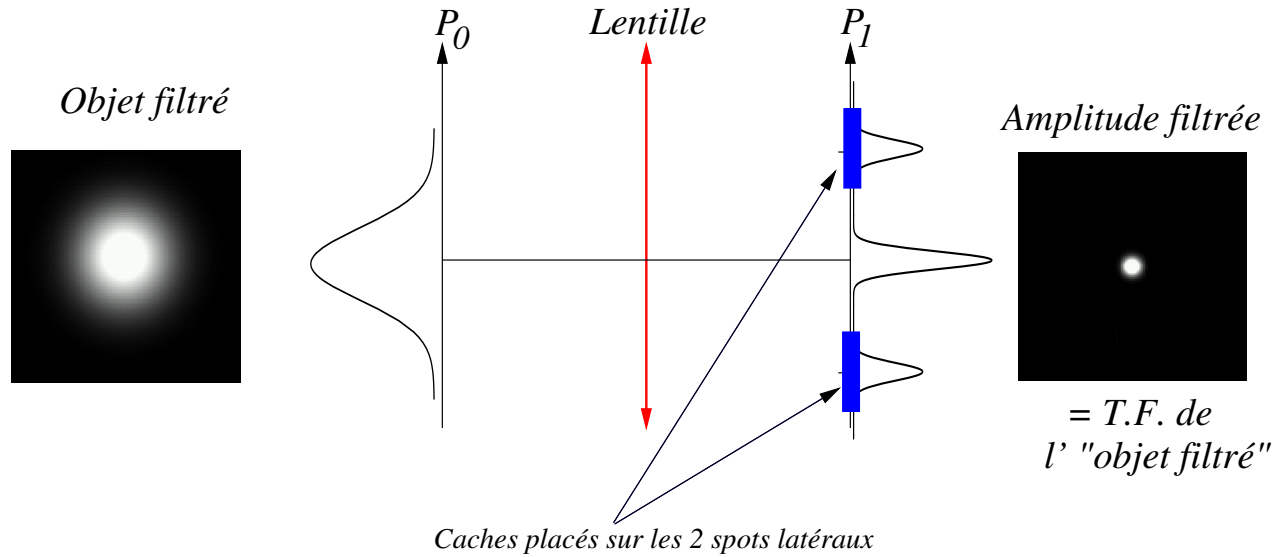
$$t(x, y) = e^{-\pi\rho^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

La transformée de Fourier de $t(x, y)$, observée dans le plan focal image P_1 , est donc la somme de trois petites gaussiennes situées en $x = 0$ et $x = \pm\lambda F/a$ dans le plan focal image.



Le filtrage consiste à intervenir sur la TF de l'objet en plaçant des masques (coefficients de transmission) dans le plan de filtrage P_1 . Ainsi si on occulte les deux spots latéraux, ne reste dans le plan P_1 que l'amplitude du seul spot central.

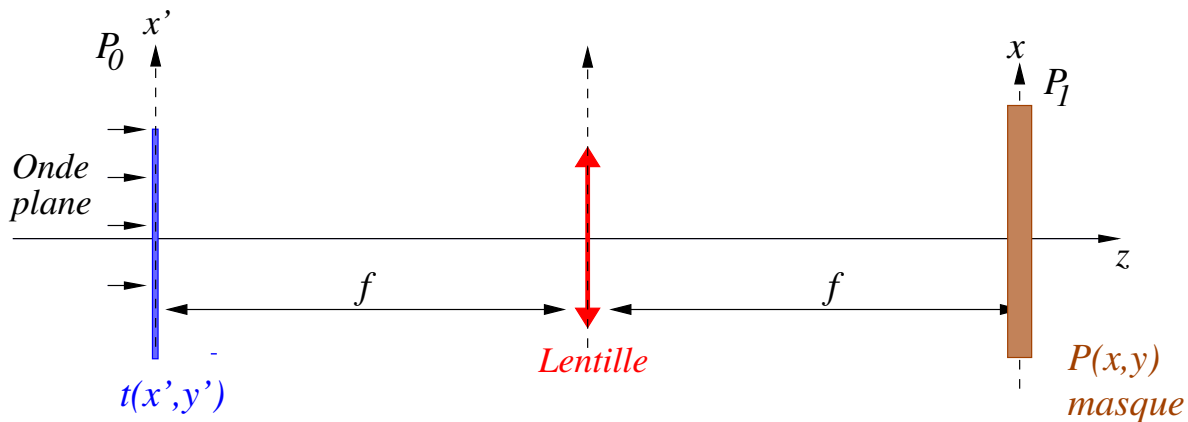
Faisons par la pensée le retour inverse de la lumière vers le plan P_0 : l'objet qui aurait donné comme figure de diffraction en P_1 le seul spot central s'appelle l'*objet filtré*. Dans notre cas cet objet filtré est une gaussienne non striée de franges (les spots latéraux étaient dûs au \cos^2 de l'expression de $t(x, y)$).



L'utilisation de ce type de technique est intéressante pour restaurer des photographies tramées. Dans les journaux, les photographies sont imprimées comme des matrices de points très serrés qui réalisent un échantillonnage bidimensionnel de la photo. Sous certaines conditions, une expérience de filtrage optique peut permettre de supprimer la trame et de restaurer la photo originale.

2.2.2 Relation objet – objet filtré

Le montage optique est le même que dans le paragraphe précédent.



On note (x', y') les coordonnées d'un point dans le plan P_0 et (x, y) les coordonnées d'un point dans le plan P_1 . L'objet $t(x', y')$ est placé au foyer objet de la lentille (plan P_0). L'amplitude de l'onde incidente dans le plan P_0 est ψ_0 . Au foyer image de la lentille (plan P_1) on place un masque de coefficient de transmission $P(x, y)$. L'amplitude dans le plan P_1 est donnée par l'équation ??

$$f_1(x, y) = \psi_0 \frac{e^{2ikf}}{i\lambda f} \hat{t} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right)$$

dans le plan P_1 on effectue le filtrage donc on multiplie cette amplitude par $P(x, y)$ pour obtenir une amplitude filtrée $\tilde{f}(x, y)$

$$\tilde{f}(x, y) = f_1(x, y) P(x, y) = \psi_0 \frac{e^{2ikf}}{i\lambda f} \hat{t} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) P(x, y)$$

ce qui s'écrit aussi, en introduisant le coefficient de transmission de l'objet filtré $\hat{t}_f(x', y')$

$$\hat{f}(x, y) = \psi_0 \frac{e^{2ikf}}{i\lambda f} \hat{t}_f \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right)$$

il vient

$$\hat{t}_f\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) = \hat{t}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) P(x, y)$$

d'où la relation de filtrage linéaire entre les transformées de Fourier de t et t_f

$$\boxed{\hat{t}_f(u, v) = \hat{t}(u, v) P(\lambda f u, \lambda f v)} \quad (2.5)$$

la fonction $P(\lambda f u, \lambda f v)$ est la fonction de transfert du filtrage.

En repassant dans le plan réel on obtiendra une relation de convolution entre t et t_f . On fait une TF inverse de l'équation précédente :

$$t_f(x, y) = t(x, y) * \mathcal{F}^{-1}\{P(\lambda f u, \lambda f v)\}$$

et compte tenu du fait que $\mathcal{F}^{-1}\{f(u)\} = \hat{f}(-x)$, on obtient

$$\boxed{t_f(x, y) = t(x, y) * \frac{1}{\lambda^2 f^2} \hat{P}\left(-\frac{x}{\lambda f}, -\frac{y}{\lambda f}\right)} \quad (2.6)$$

la fonction $\frac{1}{\lambda^2 f^2} \hat{P}\left(-\frac{x}{\lambda f}, -\frac{y}{\lambda f}\right)$ est la réponse impulsionnelle du filtrage.

Exemple d'application On s'intéresse à l'exemple du paragraphe précédent, l'objet est une gaussienne tramée d'écart-type σ qui s'écrit

$$t(x, y) = \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right] \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

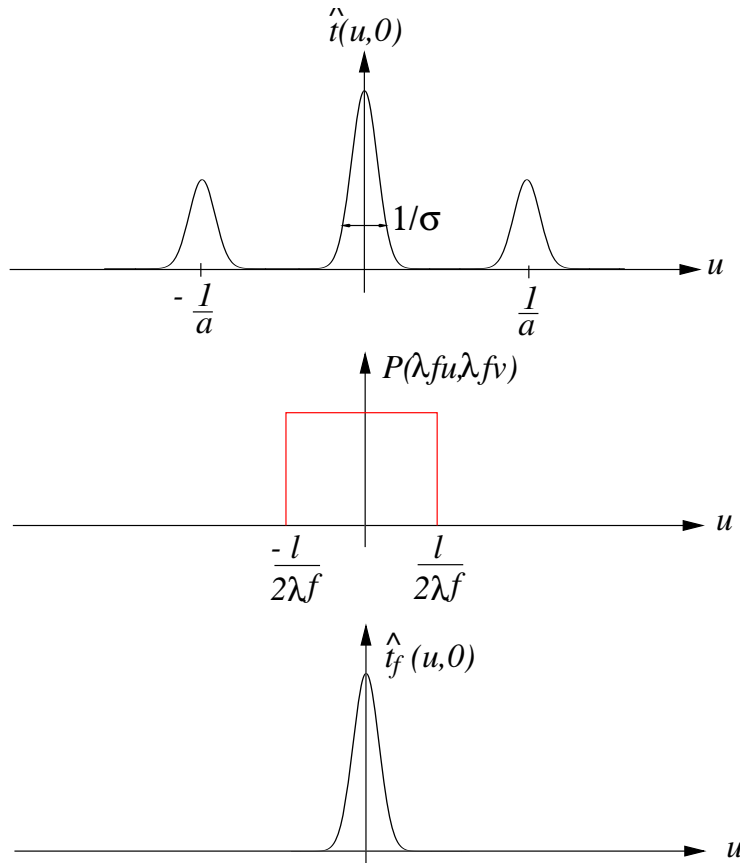
On désire filtrer cet objet par une fente rectangulaire horizontale de largeur l qui s'écrit $P(x, y) = \prod(x/l)$. L'équation 2.5 nous permet d'écrire

$$\hat{t}_f(u, v) = \hat{t}(u, v) \prod\left(\frac{\lambda f u}{l}\right) \quad (2.7)$$

avec

$$\hat{t}(u, v) = 2\pi\sigma^2 \exp(-2\pi^2\sigma^2(u^2 + v^2)) * \left[\frac{1}{2}\delta(u)\delta(v) + \frac{1}{4}\delta(u - \frac{1}{a})\delta(v) + \frac{1}{4}\delta(u + \frac{1}{a})\delta(v)\right]$$

l'opération de filtrage décrite par l'équation 2.7 est particulièrement simple à interpréter sur le graphe suivant :



Le filtrage des deux spots latéraux n'est efficace qu'aux conditions suivantes

- Les trois pics sont bien séparés : $a \ll \sigma$
- La taille de la porte est très supérieure à celle du spot central : $l \gg \frac{\lambda f}{\sigma}$
- La porte n'empiète pas sur les lobes secondaires : $l \ll \frac{2\lambda f}{a}$

Dans ce cas on peut écrire que la TF de l'objet filtré est égal au pic central :

$$\hat{t}_f(u, v) = \pi\sigma^2 \exp(-2\pi^2\sigma^2(u^2 + v^2))$$

ce qui permet d'écrire l'objet filtré :

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right]$$

On remarque que la valeur à l'origine de l'objet filtré est moitié de celle de l'objet, ce qui est une expression de la conservation de l'énergie puisque le filtrage a supprimé des fréquences dans la TF de l'objet (application du théorème de Parseval). Ce filtrage a néanmoins permis d'enlever les franges sinusoïdales striant la gaussienne. Un autre exemple de filtrage optique est montré en figure 2.1.

2.2.3 Montage à double diffraction

Ce montage à deux lentilles permet d'observer l'objet filtré. Deux lentilles L_1 et L_2 de focales respectives f_1 et f_2 sont *conjuguées* : le plan focal image de L_1 est le même que le plan focal objet de L_2 comme illustré par le schéma ci-après. Une première diffraction de Fraunhofer permet d'observer dans le plan intermédiaire P_1 la TF de l'objet placé en P_0 . Une seconde diffraction de Fraunhofer permet d'observer dans le plan P_2 la TF de l'amplitude en P_1 qui correspond à l'objet en P_0 retourné de 180° . Ce montage est dit "à double diffraction".

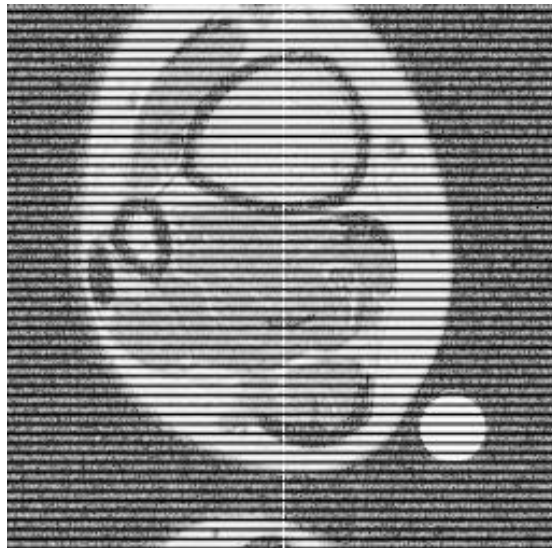
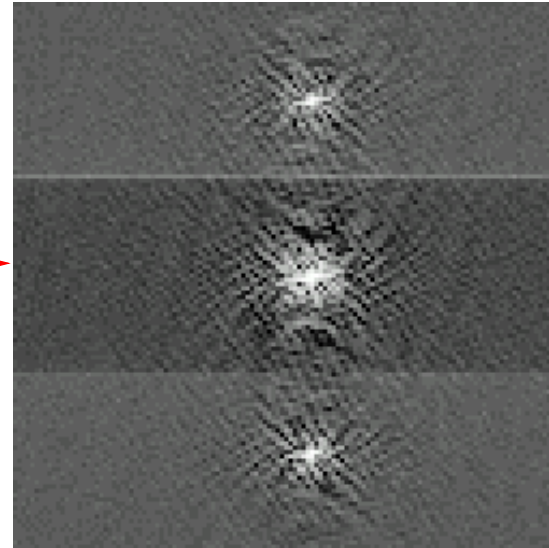


Image tramée



Transformée de Fourier optique

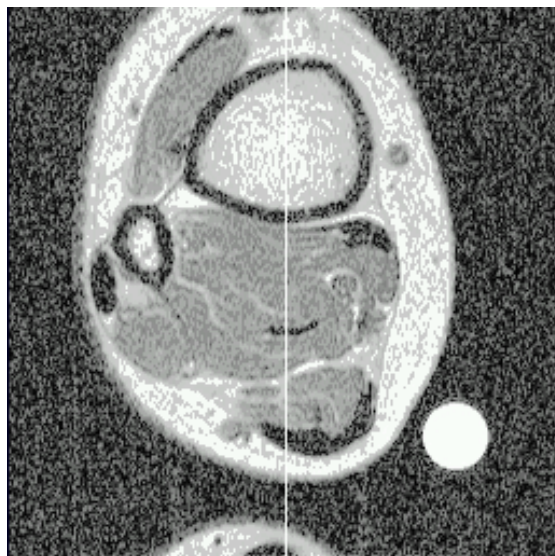
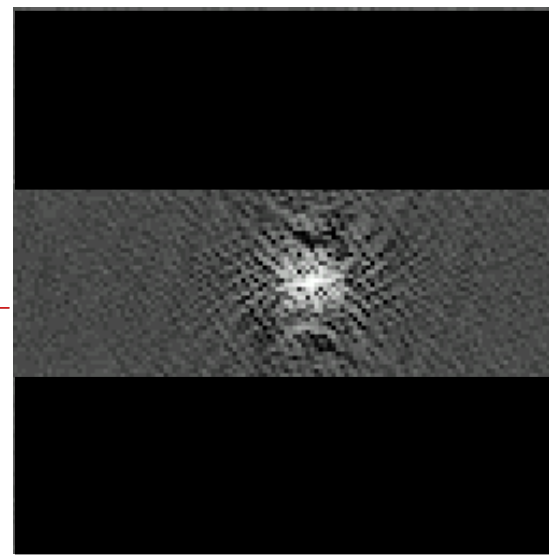
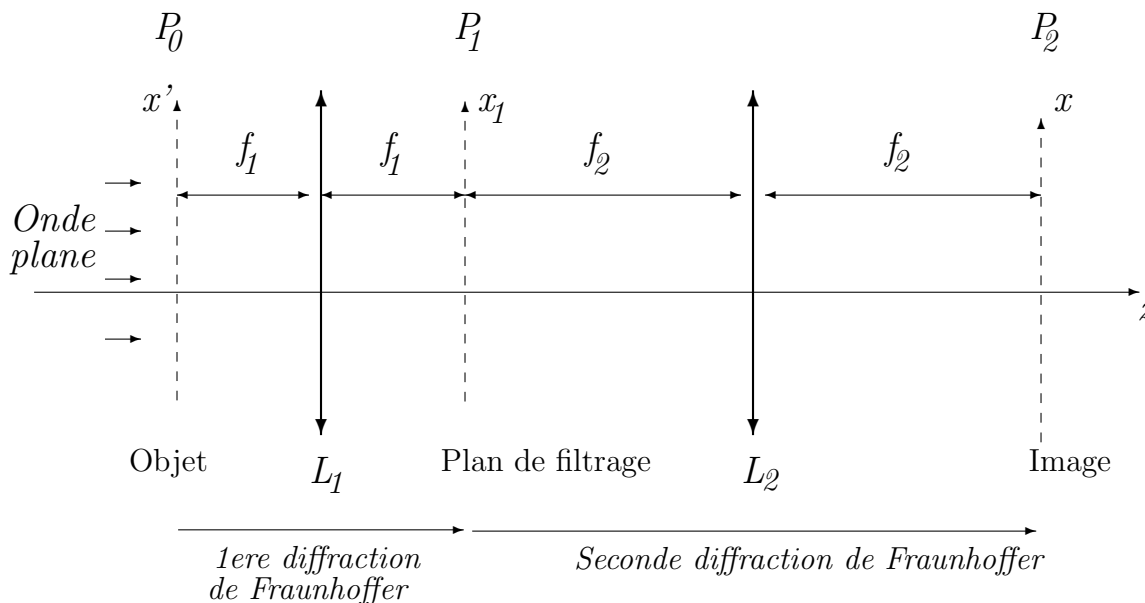


Image détramée



Filtrage : occultation des spots latéraux

FIGURE 2.1 – cellule



On appelle

- ψ_0 l'amplitude de l'onde plane incidente dans le plan P_0 (incidence normale)
- f_1 et f_2 les focales des deux lentilles
- (x', y') , (x_1, y_1) et (x, y) les coordonnées d'un point dans chacun des trois plans P_0 , P_1 et P_2
- $t(x', y')$ le coefficient de transmission de l'objet placé dans le plan P_0
- $P(x_1, y_1)$ le coefficient de transmission du masque de filtrage placé dans le plan P_1

Faisons le calcul de la propagation de P_0 à P_2 . A la sortie du plan P_0 , l'amplitude est

$$f_0(x', y') = \psi_0 t(x', y')$$

A l'entrée dans le plan P_1 elle s'écrit

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{e^{2ikf_1}}{i\lambda f_1} \hat{f}_0\left(\frac{x_1}{\lambda f_1}, \frac{y_1}{\lambda f_1}\right)$$

Dans le plan P_1 on effectue le filtrage et on multiplie l'amplitude f_1 par le masque. On obtient :

$$g(x_1, y_1) = \frac{e^{2ikf_1}}{i\lambda f_1} \hat{f}_0\left(\frac{x_1}{\lambda f_1}, \frac{y_1}{\lambda f_1}\right) P(x_1, y_1)$$

dans le plan P_2 l'amplitude s'écrit alors

$$f_2(x, y) = \frac{e^{2ikf_2}}{i\lambda f_2} \hat{g}\left(\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2}\right)$$

avec

$$\hat{g}\left(\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2}\right) = \frac{e^{2ikf_1}}{i\lambda f_1} \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2}} \left\{ \hat{f}_0\left(\frac{x_1}{\lambda f_1}, \frac{y_1}{\lambda f_1}\right) P(x_1, y_1) \right\}$$

Ce qui donne, compte tenu de la relation $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x, y)]] = f(-x, -y)$ et de la propriété $f\left(\frac{x}{a}\right) * g\left(\frac{x}{a}\right) = |a| (f * g)\left(\frac{x}{a}\right)$:

$$\boxed{f_2(x, y) = -\frac{f_1}{f_2} e^{2ik(f_1+f_2)} f_0\left(-x\frac{f_1}{f_2}, -y\frac{f_1}{f_2}\right) * \frac{1}{\lambda^2 f_2^2} \hat{P}\left(\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2}\right)} \quad (2.8)$$

C'est une relation de filtrage linéaire entre les amplitudes dans les plans P_0 et P_2 . Chacun des termes de cette relation s'interprète

- le terme $\exp(2ik(f_1 + f_2))$ exprime un déphasage global dû à la propagation sur la distance $P_0 \rightarrow P_2$

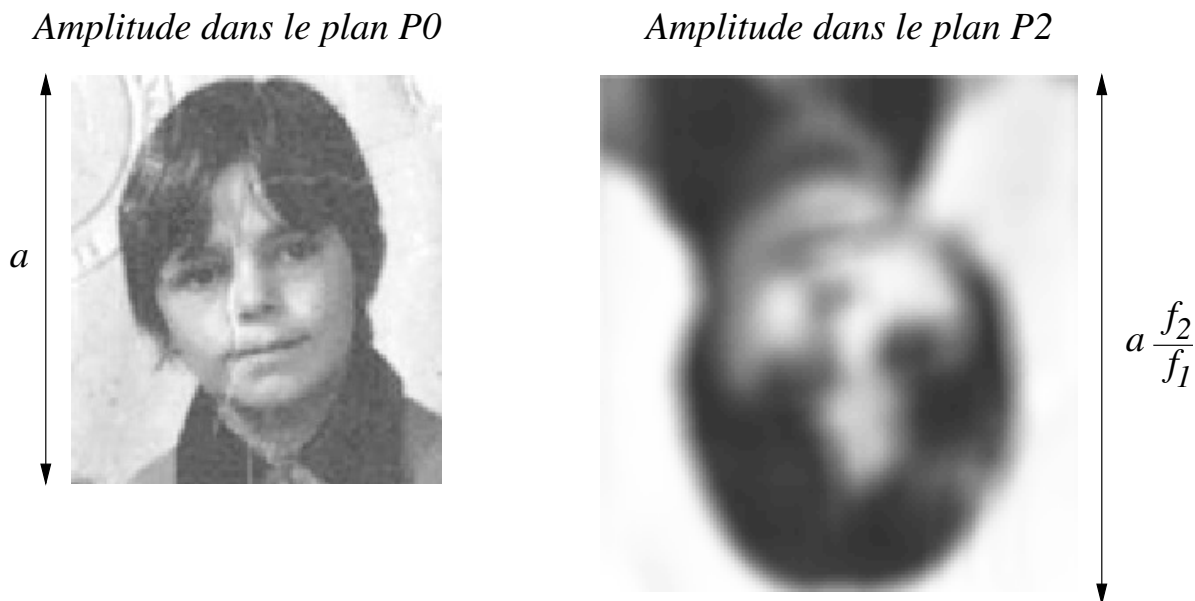


FIGURE 2.2 – Simulation de l’effet du filtrage optique sur un objet dont le coefficient de transmission est représenté sur la photo de gauche. Les focales f_1 et f_2 sont dans un rapport 1.3, le masque utilisé pour le filtrage est un diaphragme carré. La photo de droite montre le module de l’amplitude dans le plan P_2 . L’objet est inversé (signe -), agrandi (terme d’homotétie f_1/f_2) et les détails fins ont disparu (effet de la convolution).

- la réponse impulsionnelle du filtrage est la transformée de Fourier du masque filtrant

$$\frac{1}{\lambda^2 f_2^2} \hat{P} \left(\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2} \right)$$

c’est l’amplitude qui serait observée si l’objet en P_0 était un Dirac (trou d’aiguille par exemple). Dans le cas d’un filtrage passe-bas, ce terme est responsable d’un empâtement global de l’image (disparition des détails fins). Plus le masque est petit, plus sa TF est étendue et plus l’image apparaît floue.

- le terme $f_0 \left(-x \frac{f_1}{f_2}, -y \frac{f_1}{f_2} \right)$ est identique à l’amplitude en P_0 , mais *retournée de 180°* (signe -) et agrandie d’un facteur $\frac{f_2}{f_1}$
- enfin le terme multiplicatif $\frac{f_1}{f_2}$ exprime la conservation d’énergie : l’image en P_2 est plus grande (ou plus petite) que l’image en P_0 donc la quantité de lumière par unité de surface y est plus faible (ou plus élevée).

La figure 2.2 montre un exemple de filtrage de la photographie de l’auteur par un masque carré.

Fonction de transfert Dans l’espace de Fourier la relation 2.8 devient

$$\hat{f}_2(-u, -v) = -\frac{f_2}{f_1} e^{2ik(f_1+f_2)} \hat{f}_0 \left(u \frac{f_2}{f_1}, v \frac{f_2}{f_1} \right) P(\lambda f_2 u, \lambda f_2 v) \quad (2.9)$$

et fait apparaître la fonction de transfert du filtrage, $P(\lambda f_2 u, \lambda f_2 v)$ qui est la fonction masque agrandi d’un facteur $\frac{1}{\lambda f_2}$. Le signe - dans les arguments de \hat{f}_2 traduit le renversement de l’image.

Montage 4f Un cas particulier intéressant est celui du montage dit “4f” dans lequel les deux lentilles sont identiques $f_1 = f_2 = f$. Les relations objet-image entre les amplitudes deviennent

$$f_2(x, y) = -e^{4ikf} f_0(-x, -y) * \frac{1}{\lambda^2 f^2} \hat{P} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right)$$

et dans l’espace de Fourier

$$\hat{f}_2(-u, -v) = -e^{4ikf} \hat{f}_0(u, v) P(\lambda f u, \lambda f v)$$

l’objet et l’image ont ici la même taille.

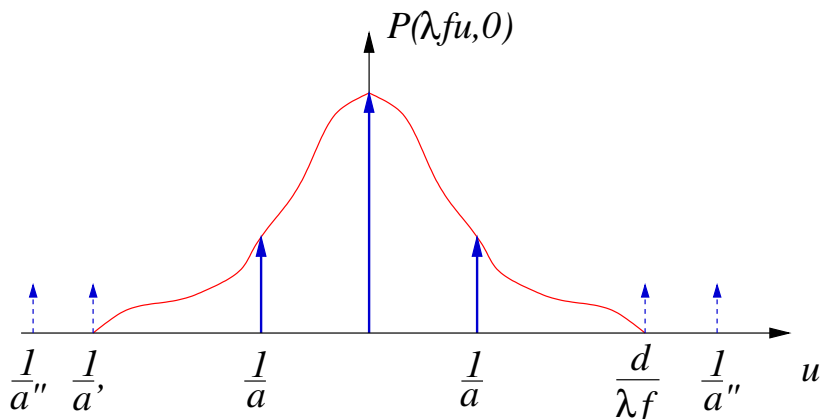


FIGURE 2.3 – Illustration du principe de filtrage d'une mire sinusoïdale. En trait continu : graphe de la fonction de transfert $P(\lambda fu, 0)$ de fréquence de coupure $u_c = \frac{d}{\lambda f}$. Une grille de période a possède les trois fréquences spatiales 0 et $\pm \frac{1}{a}$, représentées par des pics de Dirac sur le graphe dans le cas où $\frac{1}{a} < u_c$, $\frac{1}{a} = u_c$ et $\frac{1}{a} > u_c$. Dans le premier cas, les pics latéraux sont multipliés par la constante $P(\frac{\lambda f}{a}, 0)$ et l'objet filtré correspondant est une sinusoïde de contraste moindre. Dans les deux autres cas, seule la fréquence 0 est transmise, l'image dans le plan P_2 est uniforme.

Fréquence de coupure et contraste Le masque de filtrage est toujours limité spatialement, souvent il s'agit d'une fente ou d'un trou. La fonction $P(x_1, y_1)$ est alors à support borné. Faisons l'hypothèse que P est une fonction paire et plaçons-nous sur l'axe $y_1 = 0$, la fonction $P_1(x_1, 0)$ s'annule pour $|x_1| \geq d/2$, le support est de largeur d . La fonction de transfert du filtrage $P(\lambda f_2 u, 0)$ s'annule alors pour une valeur u_c dite *fréquence de coupure* et qui vaut

$$u_c = \frac{d}{2\lambda f_2} \quad (2.10)$$

Physiquement cette valeur représente la fréquence de la sinusoïde la plus serrée que le montage optique est capable d'imager avec un contraste non nul.

En effet considérons un objet sinusoïdal $t(x, y) = \cos^2(\pi x/a)$. Les fréquences spatiales présentes dans cet objet sont 0 et $\pm 1/a$. Effectuons un filtrage optique de cet objet à l'aide d'un montage $4f$. La relation 2.9 devient, K étant la constante multiplicative

$$\hat{f}_2(-u, -v) = K P(\lambda fu, \lambda fv) \left[\frac{1}{2} \delta(u, v) + \frac{1}{4} \delta\left(u - \frac{1}{a}, v\right) + \frac{1}{4} \delta\left(u + \frac{1}{a}, v\right) \right]$$

ce qui s'écrit aussi

$$\hat{f}_2(u, v) = \frac{K}{2} P(0, 0) \delta(u, v) + \frac{K}{4} P(\lambda f/a, 0) \left[\delta\left(u - \frac{1}{a}, v\right) + \delta\left(u + \frac{1}{a}, v\right) \right]$$

si la fréquence de la sinusoïde $\frac{1}{a} \geq u_c$, alors $P(\lambda f/a, 0)$ et $\hat{f}_2(u, v) = \frac{K}{2} P(0, 0) \delta(u, v)$ est limitée à son seul pic central. L'image dans le plan P_2 est alors uniforme (contraste nul). On dit que le masque P ne *transmet pas* les fréquences supérieures à u_c . La figure 2.3 illustre ce principe.

La fonction de transfert donne une idée du contraste de l'amplitude de l'image dans le plan P_2 . Cette amplitude s'écrit comme la transformée de Fourier inverse de l'équation précédente

$$f_2(x, y) = \text{Cte} \left(P(0, 0) + P\left(\frac{\lambda f}{a}, 0\right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right)$$

Elle correspond à une sinusoïde de contraste

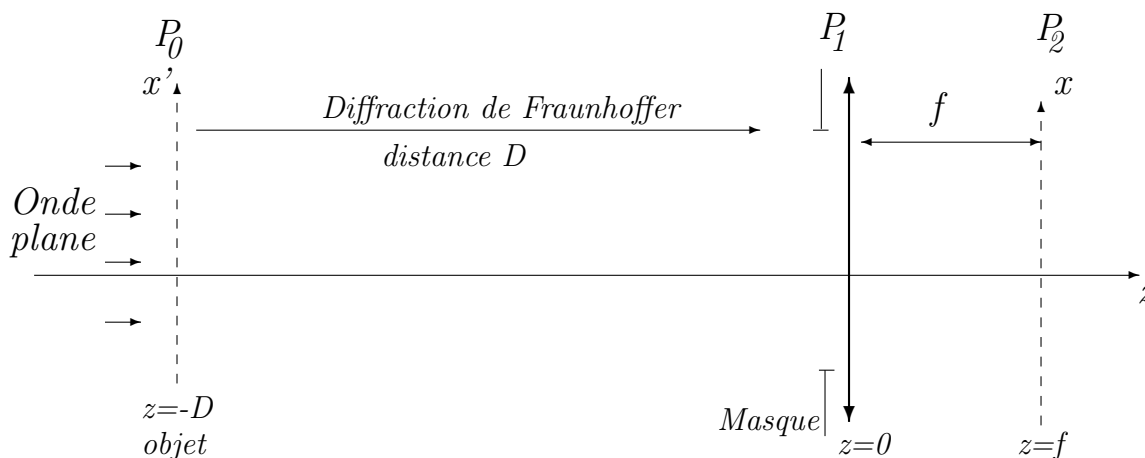
$$C = \left| \frac{P(\frac{\lambda f}{a}, 0)}{P(0, 0)} \right|$$

Ce qui donne une signification physique à la fonction de transfert et une manière de la mesurer. La mesure de la fonction de transfert est un moyen de caractériser la qualité des optiques.

En fait l'oeil et les détecteurs sont sensibles à l'intensité et pas à l'amplitude. Pour cette raison la fonction de transfert mesurée est plutôt celle qui correspond à la relation objet-image en éclairage incohérent (relation sur les intensités et non sur les amplitudes).

2.2.4 Objet à l'infini — Formation d'images

On peut supprimer la première lentille et placer l'objet à grande distance de la lentille restante : on réalise ainsi une vraie diffraction de Fraunhofer entre le plan de l'objet et le plan du masque. Le montage optique est alors le suivant :



Les notations sont les suivantes

- Amplitude de l'onde incidente dans le plan de l'objet : ψ_0
- $t(x', y')$: coefficient de transmission de l'objet
- Distance objet-masque : D , assez grand pour pouvoir faire l'approximation de Fraunhofer
- Lentille de focale f et masque $P(x_1, y_1)$ dans le même plan pris comme origine des z
- $f_2(x, y)$: amplitude au plan focal

A la sortie de l'objet ($z = -D$), l'amplitude s'écrit

$$f_0(x', y') = \psi_0 t(x', y')$$

Une première diffraction de Fraunhofer permet d'écrire l'amplitude à l'entrée du masque

$$\psi(x_1, y_1, 0^-) = \frac{e^{ikD}}{i\lambda D} \hat{f}_0\left(\frac{x_1}{\lambda D}, \frac{y_1}{\lambda D}\right)$$

puis sur la lentille

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{e^{ikD}}{i\lambda D} \hat{f}_0\left(\frac{x_1}{\lambda D}, \frac{y_1}{\lambda D}\right) P(x_1, y_1)$$

On utilise la relation 2.1 qui donne l'amplitude au foyer de la lentille

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \exp\left[\frac{i\pi\rho^2}{\lambda f}\right] \hat{f}_1\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \\ &= -\frac{e^{ik(f+D)}}{\lambda^2 f D} \exp\left[\frac{i\pi\rho^2}{\lambda f}\right] \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}} \left\{ \hat{f}_0\left(\frac{x_1}{\lambda D}, \frac{y_1}{\lambda D}\right) P(x_1, y_1) \right\} \\ &= -e^{ik(f+D)} \frac{D}{f} \exp\left[\frac{i\pi\rho^2}{\lambda f}\right] \hat{P}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) * f_0\left(-x\frac{D}{f}, -y\frac{D}{f}\right) \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \frac{x}{f}$ et $\beta = \frac{y}{f}$. Ce sont les sinus des deux angles θ_x et θ_y sous lesquels est vu un point du plan focal image (x, y) depuis le centre de la lentille (dessin ci-contre). Posons aussi $i(\alpha, \beta) = f_2(x, y) = f_2(\alpha f, \beta f)$. Alors

que $f_2(x, y)$ désigne l'amplitude en un point (x, y) de l'image (répartition spatiale d'amplitude), $i(\alpha, \beta)$ désigne l'amplitude diffractée dans la direction (α, β) , c'est donc une *répartition angulaire d'amplitude* dans l'image.

Il vient

$$i(\alpha, \beta) = -e^{ik(f+D)} \frac{D}{f} \exp [i\pi\lambda f(\alpha^2 + \beta^2)] \hat{P} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) * f_0(-\alpha D, -\beta D)$$

Posons $o(\alpha, \beta) = f_0(\alpha D, \beta D)$, cette fonction désigne l'amplitude observée depuis le centre de la lentille dans une direction (α, β) , c'est à dire la *répartition angulaire d'amplitude sur l'objet*. Nous aboutissons à la relation de convolution suivante :

$$i(\alpha, \beta) = -e^{ik(f+D)} \frac{D}{f} \exp [i\pi\lambda f(\alpha^2 + \beta^2)] \hat{P} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) * o(-\alpha, -\beta)$$

Cette relation entre les répartitions angulaires d'amplitude est indépendante de la focale de la lentille et de la distance de l'objet. La réponse impulsionnelle de l'objet est la transformée de Fourier du masque

$$R(\alpha, \beta) = \hat{P} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right)$$

Cette relation est à comparer à celle qui existe entre les répartitions spatiales d'amplitude entre les plans P_0 et P_2 d'un montage à double diffraction (eq. 2.8). Outre l'indépendance par rapport aux focales, nous avons ici un terme multiplicatif $\exp [i\pi\lambda f(\alpha^2 + \beta^2)]$ qui dépend des variables (α, β) .

Cependant ce calcul est fait dans les limites de l'optique paraxiale avec des angles inférieurs à la dizaine de degrés (voir § ??). Dans le visible, $\lambda \simeq 0.5\mu\text{m}$, les focales moyennes sont de quelques dizaines de centimètres, prenons par exemple $f = 1$ m. Posons $\theta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Nous sommes en optique paraxiale si $\theta \lesssim 15^\circ \simeq 0.25$ rad. L'argument de l'exponentielle vaut alors

$$\pi\lambda f(\alpha^2 + \beta^2) \simeq 10^{-7}$$

et le facteur multiplicatif $\exp [i\pi\lambda f(\alpha^2 + \beta^2)]$ est donc toujours quasiment égal à un en optique paraxiale. On peut donc ré-écrire la relation de convolution objet-image :

$$i(\alpha, \beta) = -e^{ik(f+D)} \frac{D}{f} \hat{P} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) * o(-\alpha, -\beta) \quad (2.11)$$

Fonction de transfert Soit $(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$ le couple de fréquences *angulaires* associé à (α, β) . La TF de l'équation précédente s'écrit

$$\hat{i}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = -e^{ik(f+D)} \frac{D}{f} \hat{o}(-\sigma_\alpha, -\sigma_\beta) \lambda^2 P(-\lambda\sigma_\alpha, -\lambda\sigma_\beta)$$

d'où

$$\hat{i}(-\sigma_\alpha, -\sigma_\beta) = -\frac{D\lambda^2}{f} e^{ik(f+D)} \hat{o}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) P(\lambda\sigma_\alpha, \lambda\sigma_\beta) \quad (2.12)$$

La fonction de transfert du filtrage s'écrit

$$T(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = P(\lambda\sigma_\alpha, \lambda\sigma_\beta)$$

Fonction pupille Considérons le montage optique de la figure 2.4, constitué d'un diaphragme de coefficient de transmission $P(x', y')$ placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente de focale F . Éclairons-le par une onde plane d'amplitude constante A . On observe dans le plan focal image la réponse impulsionnelle, dont l'amplitude complexe $R(\alpha, \beta)$ s'écrit comme une transformée de Fourier simple de la fonction $P(x', y')$:

$$R(\alpha, \beta) = \frac{Ae^{2ikF}}{i\lambda F} \hat{P} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right)$$

La fonction $P(x', y')$ est appelée *fonction pupille* de l'instrument. Elle correspond, à une constante près, à la distribution d'amplitude dans le plan focal objet de la lentille.

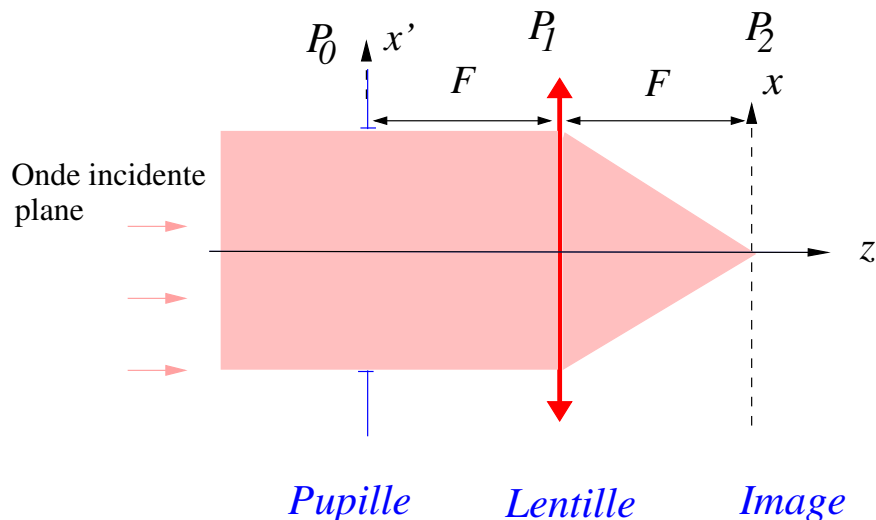


FIGURE 2.4 – Fonction pupille dans plan focal objet d’une lentille convergente. L’amplitude dans le plan focal image est la TF simple de la fonction pupille.

On parle parfois de “charnière optique” pour la pupille : une translation transversale de l’image (convolution par un terme $\delta(\alpha - \alpha_0)$) multiplie la pupille par un terme de phase $e^{ik\alpha_0 x'}$ sans changer sa position. Dans le cas où la pupille est un diaphragme circulaire qui délimite un faisceau de rayons, les rayons périphériques passent à travers le diaphragme quelle que soit la position de l’image (voir figure 2.5). Le plan focal objet ou *plan pupille* est le seul plan où cela se produit.

Il est à noter que lorsque le masque $P(x', y')$ n’est pas dans le plan pupille (plan focal objet de la lentille), alors la fonction pupille n’est plus $P(x', y')$. Il apparaît une convolution par un terme de phase quadratique exprimant la propagation entre le plan pupille (plan focal objet), et le plan du masque (terme de défocalisation). Mais la fonction pupille reste la distribution d’amplitude dans le plan focal objet.

Rapport d’ouverture C’est le rapport

$$r = \frac{f}{d}$$

avec f la focale de la lentille et d le diamètre de la pupille d’entrée. Dans les appareils photos, un diaphragme réglable permet d’ajuster le rapport r à des valeurs comme “2.8” ou “5.6” bien connues des photographes. Le tableau suivant donne le diamètre de la pupille d’entrée d’un objectif de focale $f = 50$ mm pour différentes valeurs du rapport d’ouverture :

r	d
1.2	42 mm
2.8	18 mm
5.6	9 mm
11	4.5 mm
22	2.3 mm

Un objectif ouvert à 1.2 aura donc une lentille frontale de diamètre au moins égal à 4 cm de diamètre, contre seulement 1 cm pour un objectif ouvert à 5.6. Il sera donc 16 fois plus lumineux. Mais aussi plus difficile à réaliser techniquement : une lentille de taille plus importante aura une surface plus bombée et les aberrations optiques seront plus difficiles à corriger.

Fréquence de coupure et pouvoir de résolution : cas d’une lunette astronomique Une lunette astronomique est constituée d’une lentille limitée par un diaphragme circulaire.

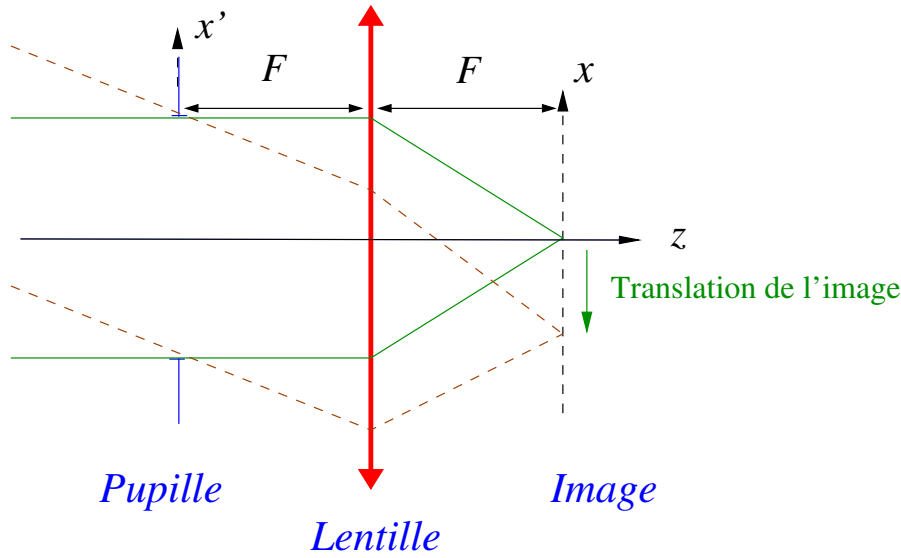
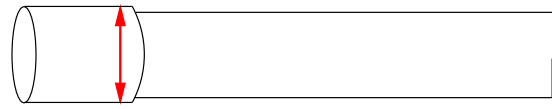


FIGURE 2.5 – Illustration de l’effet de “charnière optique” de la fonction pupille. Lorsque l’on déplace l’image dans le plan focal image, les rayons correspondant s’inclinent mais passent tous par la pupille. L’amplitude complexe de la pupille est multipliée par un terme de phase linéaire (correspondant à une onde plane inclinée).

*



Objet à l’infini

Lunette astronomique

La fonction pupille s’écrit

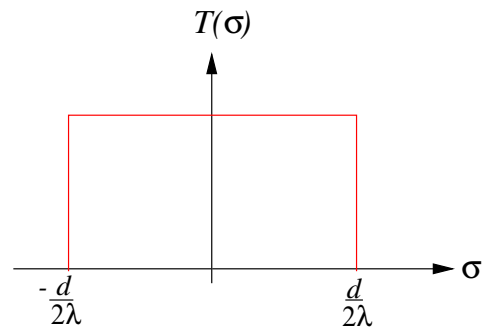
$$P(x, y) = \Pi \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d} \right)$$

la fonction de transfert s’écrit

$$T(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \Pi \left(\frac{\lambda \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2}}{d} \right)$$

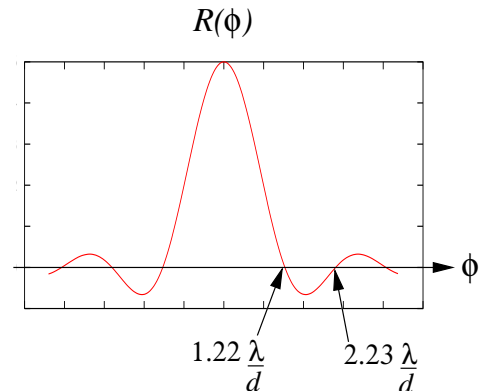
elle possède une fréquence de coupure

$$\sigma_c = \frac{d}{2\lambda}$$



la réponse impulsionnelle s’écrit

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta) &= \frac{\pi d^2}{2} J_{1c} \left(\frac{\pi d \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\pi d^2}{2} J_{1c} \left(\frac{\pi d \phi}{\lambda} \right) \end{aligned}$$



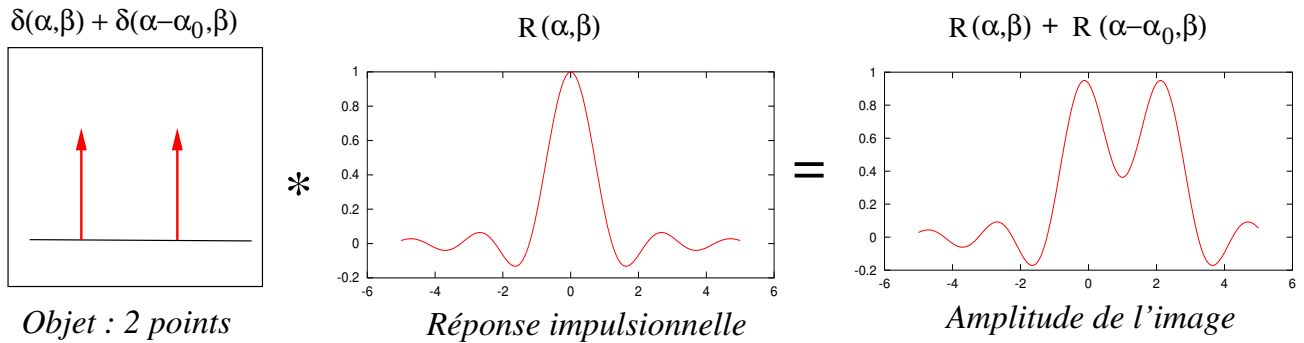
Le *pouvoir de résolution* en éclairage cohérent est défini à partir de l'image de deux sources ponctuelles. Soit $o(\alpha, \beta) = \delta(\alpha, \beta) + \delta(\alpha - \alpha_0, \beta)$ la répartition angulaire d'amplitude de l'objet. L'image au foyer de la lunette possède une répartition angulaire d'amplitude $i(\alpha, \beta)$ qui s'écrit à l'aide de la relation 2.11

$$i(\alpha, \beta) = \text{Cte } o(-\alpha, -\beta) * R(\alpha, \beta)$$

ce qui donne la superposition de deux réponses impulsionnelles décalées de α_0 :

$$i(\alpha, \beta) = \text{Cte } [R(\alpha, \beta) + R(\alpha + \alpha_0, \beta)]$$

comme schématisé sur le dessin ci-après :



Lorsque l'on fait varier l'écartement α_0 des deux sources, les amplitudes $R(\alpha, \beta)$ et $R(\alpha + \alpha_0, \beta)$ correspondent à deux taches lumineuses dont l'écartement varie dans les mêmes proportions, comme illustré par la figure 2.6. La taille de chaque tache est de l'ordre de λ/d . Si les deux sources sont très séparées ($\alpha_0 \gg \lambda/d$) les deux réponses impulsionnelles seront aussi très séparées dans l'image : on observera deux taches. Dans le cas inverse les deux taches se fondent en une seule.

Le cas limite définit le pouvoir de résolution de l'instrument. C'est l'écartement minimum entre deux points séparés en deux taches individuelles. Par extension ce pouvoir de résolution donne la taille du plus petit détail visible dans une image.

La définition du pouvoir de résolution est assez empirique et dépend de l'instrument utilisé : une pupille carrée aura un pouvoir de résolution différent d'une pupille circulaire. En éclairage cohérent (addition des amplitudes) une définition possible est l'angle ρ entre le centre de la réponse impulsionnelle et son premier minimum négatif. La figure 2.6 (colonne du milieu) montre que si $\alpha_0 = \rho$ on a observe deux taches "à peine" séparées avec une intensité centrale I_0 valant 80 pour cent de celle du maximum observée au centre des taches.

Pour une pupille circulaire, le pouvoir de résolution en éclairage cohérent vaut donc :

$$\rho = 1.6 \frac{\lambda}{d}$$

Ce résultat n'est pas applicable en lumière blanche (voir chapitre sur la cohérence) où l'on somme les intensités provenant des deux sources et non leur amplitude. Le pouvoir de résolution en lumière incohérente vaut, selon la définition de Lord Rayleigh $\rho' = 1.2 \frac{\lambda}{d}$.

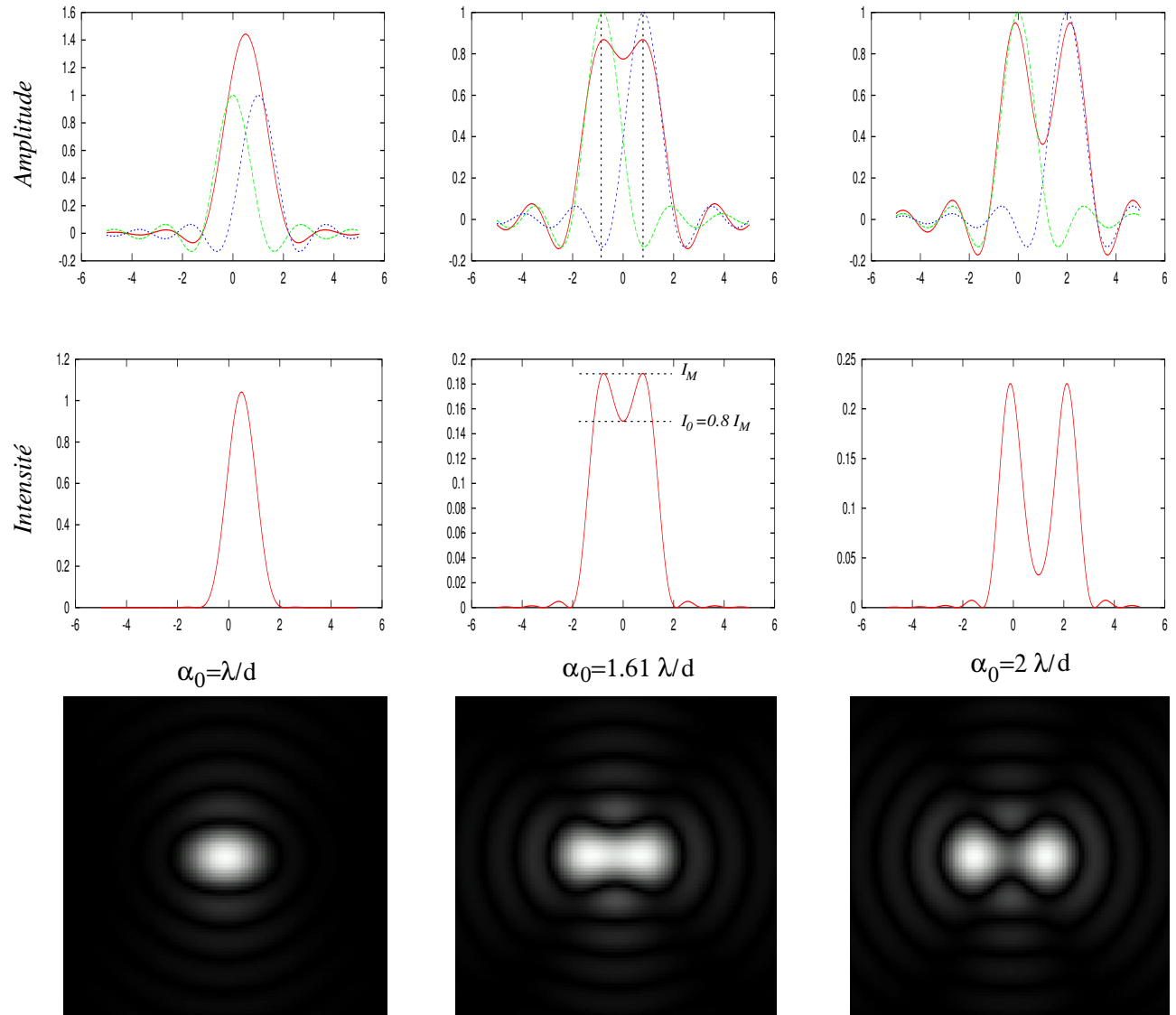


FIGURE 2.6 – Illustration du pouvoir de résolution d’une optique à pupille circulaire de diamètre d en lumière cohérente. On fabrique l’image de deux points par la somme des amplitudes de deux réponses impulsionnelles décalées $i(\alpha, \beta) = \text{Cte} [R(\alpha, \beta) + R(\alpha + \alpha_0, \beta)]$ (voir texte). Les trois figures du haut montrent l’amplitude somme $i(\alpha, \beta)$ et les deux amplitudes individuelles $R(\alpha, \beta)$ et $R(\alpha + \alpha_0, \beta)$ pour différentes valeurs de α_0 . Les courbes de la ligne du milieu montrent l’intensité correspondante $|i(\alpha, \beta)|^2$. On s’aperçoit que dans le cas où $\alpha_0 < \frac{\lambda}{d}$ les deux taches sont confondues en une seule et l’on dit que l’instrument n’est pas capable de “séparer” les deux sources. Un cas limite est atteint quand $\alpha_0 = 1.61 \frac{\lambda}{d}$ (colonne du milieu) : le maximum de chaque tache tombe en face du premier minimum négatif de l’autre. L’intensité au centre vaut 80 % du maximum. Les trois figures du bas donnent l’aspect visuel de l’image dans chacun des cas.