

Chapitre 1

Cohérence Spatiale

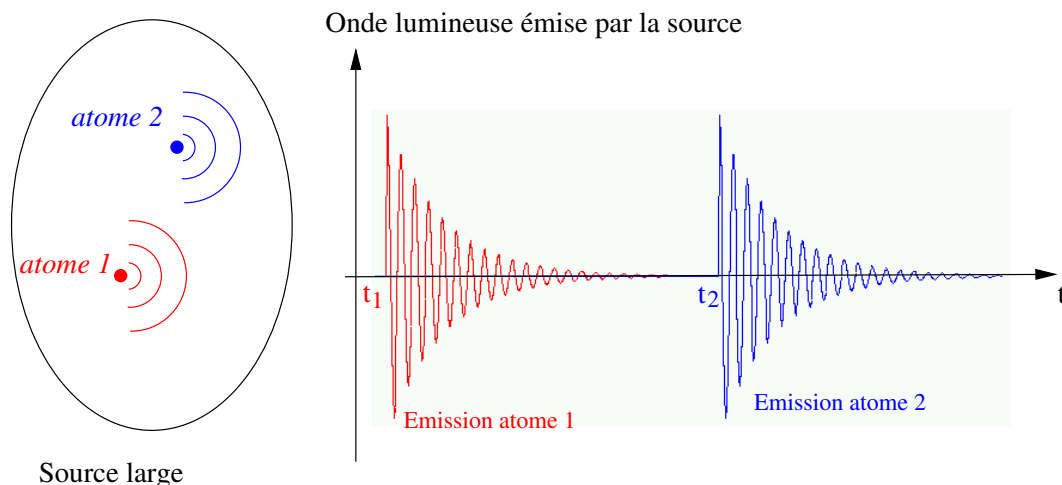
1.1 Introduction

Les problèmes de cohérence spatiale interviennent lorsque l'on a affaire à des sources larges. Si on essaye de faire des franges d'Young avec une source lumineuse monochromatique de type lampe à gaz placée près d'une paire de trous espacés de quelques dixièmes de mm, on s'aperçoit que cela ne marche pas : il n'y a tout simplement pas de franges. Mais si on éloigne la lampe ou si on la diaphragme les franges réapparaissent. On a donc une perte de cohérence de la lumière lorsque la source devient large. Le but du présent chapitre est d'expliquer cette perte de cohérence.

On supposera dans toute la présentation que les sources sont monochromatiques (en fait quasi-monochromatiques). Les sources sont composées d'atomes qui émettent de la lumière comme autant de sources ponctuelles, chaque atome émettant de manière indépendante de son voisin (on exclut ici le cas des lasers). Un atome émet de la lumière visible après une désexcitation électronique ; ces événements se produisent à des instants aléatoires t_n et l'émission dure un temps τ assez bref, de l'ordre de 10^{-11} s (cette durée est précisément le temps de cohérence de la lumière défini au chapitre précédent). Ainsi, l'amplitude complexe de l'onde émise par l'atome après une désexcitation peut s'écrire sous la forme

$$\psi_n(r, t) = A_n(r) e^{-(t-t_n)/\tau} \exp -i\omega(t - t_n)$$

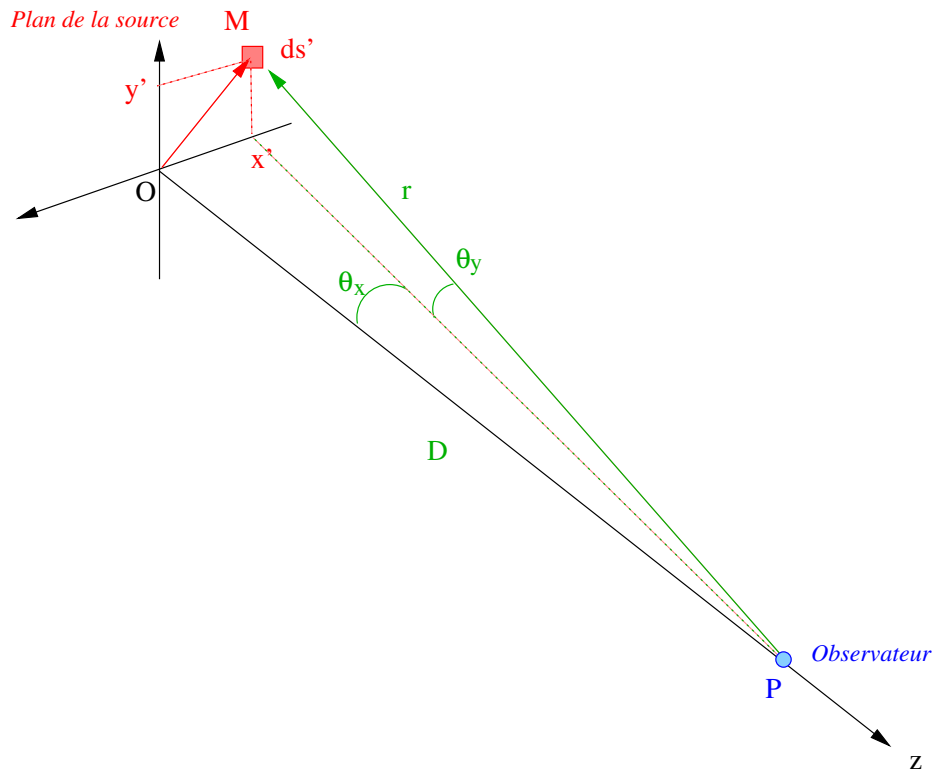
où $A_n(r)$ est une fonction contenant la dépendance spatiale de ψ . Considérons deux atomes différents émettant des ondes lumineuses d'amplitude complexe ψ_n et ψ_m aux instants t_n et t_m ; la différence de phase de ces deux ondes fait intervenir le nombre aléatoire $t_m - t_n$. Il en résulte que les deux ondes sont incohérentes entre elles car elles ont une différence de phase non stationnaire (voir paragraphe sur la cohérence mutuelle).



On dira donc qu'une source large composée de points-source indépendants est **spatialement incohérente**. On ne calculera pas l'amplitude complexe émise par l'ensemble de la source en un point M de l'espace, mais on pourra calculer l'intensité en M comme somme des intensités rayonnées par chacun des points-source.

1.2 Distributions de brillance

Soit \mathcal{S} une source lumineuse de centre O , et Oz la droite joignant le centre de la source à l'observateur. La source est généralement tridimensionnelle (lampe à filament, Soleil...) mais l'observateur n'est sensible qu'à sa projection \mathcal{S}' dans le plan perpendiculaire à Oz (ainsi le Soleil nous apparaît comme un petit disque et non comme une boule). Soit $x'Oy'$ le plan perpendiculaire à Oz .



Distribution spatiale de brillance Soit $\vec{r}' = (x', y')$ les coordonnées d'un point M sur la source \mathcal{S}' , et ds' un élément de surface autour de M . On note $d\psi = f(\vec{r}', t) ds'$ l'amplitude complexe émise par l'élément de surface ds' et $dI = I_0(x', y') ds'$ l'intensité moyenne correspondante (avec $I_0(x', y') = |f(\vec{r}', t)|^2$). La fonction $I_0(x', y')$ a la dimension d'une intensité par unité de surface de la source. Elle est appelée **distribution spatiale de brillance** de la source \mathcal{S}' .

Distribution angulaire de brillance On appelle P le point sur lequel se trouve l'observateur et D la distance OP . Soit \vec{r} le vecteur PM joignant l'observateur à un point de la source. On a $\vec{r} = (x', y', D)$. Les quantités $\alpha = \frac{x'}{D}$ et $\beta = \frac{y'}{D}$ représentent la direction dans laquelle est vu le point M depuis P (tangentes des angles θ_x et θ_y indiqués sur la figure). La quantité $d\Omega = \frac{ds'}{D^2} = d\alpha d\beta$ est l'angle solide sous lequel est vu l'élément de surface ds' depuis l'observateur.

L'élément de surface ds' autour du point M émet une intensité

$$dI = I_0(x', y') ds' = I_0(\alpha D, \beta D) D^2 d\alpha d\beta$$

On écrira

$$dI = O(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

La quantité $O(\alpha, \beta)$ est appelée **distribution angulaire de brillance** de la source \mathcal{S}' . Elle est proportionnelle à $I_0(\alpha D, \beta D)$ (distribution spatiale de brillance). et diminue comme le carré de la distance D^2 . Elle représente l'intensité observée par unité d'angle solide dans une direction (α, β) .

Exemples

Disque uniforme : Un disque uniforme de diamètre d dans le plan $(x'Oy')$ a une distribution spatiale de brillance

$$I_0(x', y') = K \prod \left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{d} \right)$$

(avec K une constante) et émet dans tout l'espace une intensité totale $K \pi d^2 / 4$.

Pour calculer sa distribution *angulaire* de brillance $O(\alpha, \beta)$ il convient de se placer à une distance D du plan de la source et d'introduire son *diamètre angulaire* θ_0 défini par $\tan(\theta_0/2) = d/2D$ (qui devient simplement d/D si $D \gg d$). Il vient

$$O(\alpha, \beta) = \frac{K}{D^2} \prod \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\theta_0} \right)$$

Bien souvent, on omettra le facteur $1/D^2$ (on l'inclura dans la constante K).

Fente : Une fente de largeur d dans la direction x' et de hauteur infinie dans la direction y' a une distribution spatiale de brillance

$$I_0(x', y') = K \prod \left(\frac{x'}{d} \right)$$

en utilisant les mêmes notations que pour le disque. Sa distribution angulaire de brillance s'écrit

$$O(\alpha, \beta) = \frac{K}{D^2} \prod \left(\frac{\alpha}{\theta_0} \right)$$

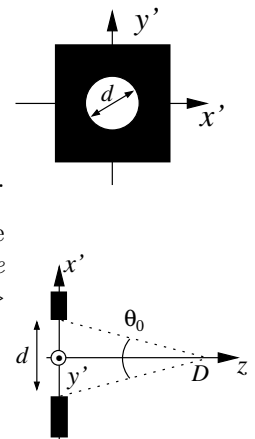
avec θ_0 sa *largeur angulaire*.

Point-source : Un point-source situé aux coordonnées (x_0, y_0) dans le plan $(x'Oy')$ a une distribution spatiale de brillance

$$I_0(x', y') = K \delta(x - x_0, y - y_0)$$

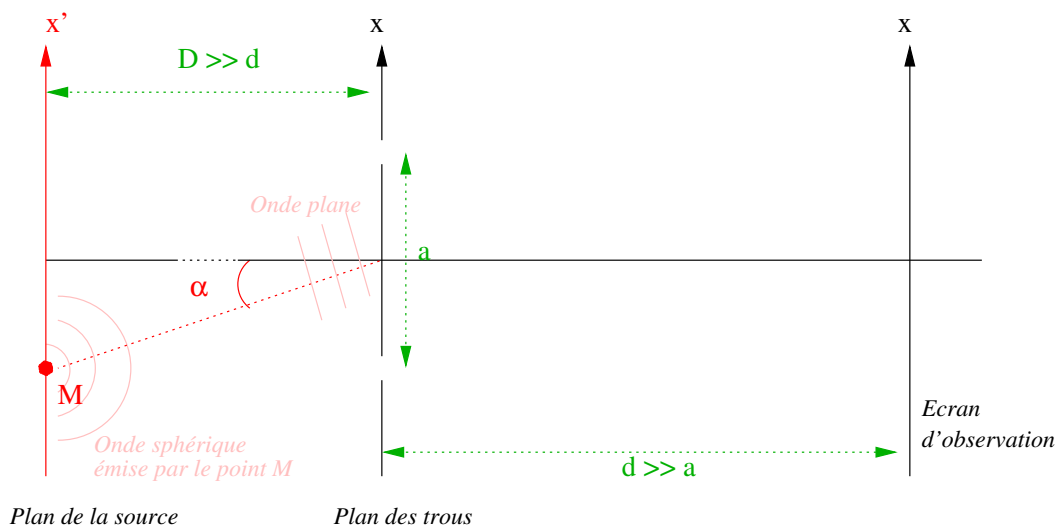
Sa distribution angulaire de brillance s'écrit

$$O(\alpha, \beta) = K \delta(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)$$



1.3 Franges d'Young avec une source large

Ce paragraphe est un cas particulier simple du problème des interférences avec de la lumière provenant de sources larges. Considérons le dispositif suivant :



Une source large est placée dans un plan $(x', y', z = -D)$. Elle éclaire un interféromètre à trous d'Young placé dans le plan $z = 0$. La source est supposée monochromatique (longueur d'onde λ). Les trous distants de a sont alignés suivant Ox . On observe les franges sur un écran placé à une distance d du plan des trous.

On prendra les conventions suivantes :

- On suppose $D \gg d$ et $d \gg a$ de telle sorte que les conditions de la diffraction de Fraunhofer soient réalisées.
- On notera M un point de la source (coordonnées (x', y') dans le plan de la source).
- On notera $d\psi_0 = f_0(x', y') dx' dy'$ l'amplitude de l'onde sphérique émise par le point M . Cette onde sphérique est plane en arrivant dans le plan des trous (approximation de Fraunhofer).
- On notera $I_0(x', y')$ et $O(\alpha, \beta)$ les distributions spatiale de angulaire brillance. On supposera dans un premier temps que ces fonctions sont symétriques (paires).
- On supposera que la source est peu étendue (support borné) et on se placera dans les conditions de l'optique paraxiale (α et β s'identifient aux angles θ_x et θ_y).

La technique de calcul de l'intensité des franges d'interférences consiste à prendre la source point par point, de calculer les franges d'Young produites par chaque point de la source, et d'intégrer sur la source. Considérons donc un point M de la source. Ce point rayonne dans le demi-espace $z > -D$ une onde sphérique d'amplitude complexe (la dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ est omise dans cette présentation (elle disparaîtra de toutes façons dans le calcul de l'intensité)

$$df(r) = d\psi_0 \frac{\exp ikr}{r}$$

cette onde est plane en arrivant dans le plan $z = 0$. Elle arrive sous l'incidence oblique caractérisée par les deux cosinus directeurs α et β (ici assimilables aux angles). Ainsi l'amplitude complexe dans le plan $z = 0$ s'écrit

$$df_0(x, y) = K d\psi_0 \exp ik(\alpha x + \beta y)$$

Le coefficient de transmission $t(x, y)$ du masque est modélisé par la somme de deux distributions δ :

$$t(x, y) = \delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\delta(y) + \delta\left(x + \frac{a}{2}\right)\delta(y)$$

et l'amplitude complexe à la sortie du masque est

$$df_1(x, y) = K d\psi_0 \left[e^{ik\alpha a/2}\delta\left(x - \frac{a}{2}\right) + e^{-ik\alpha a/2}\delta\left(x + \frac{a}{2}\right) \right] \delta(y)$$

Dans le plan d'observation $z = d$, puisque $d \gg a$ on fait l'approximation de Fraunhofer et l'on écrit l'amplitude complexe en $z = d$ comme la transformée de Fourier de celle en $z = 0$:

$$df_d(x, y) = K d\psi_0 \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{ik\alpha a/2} \exp\left(-i\pi \frac{ax}{\lambda d}\right) + e^{-ik\alpha a/2} \exp\left(i\pi \frac{ax}{\lambda d}\right)$$

ce qui s'écrit comme

$$df_d(x, y) = 2K f_0(x', y') dx' dy' \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \cos\left(\pi a \frac{x - \alpha d}{\lambda d}\right)$$

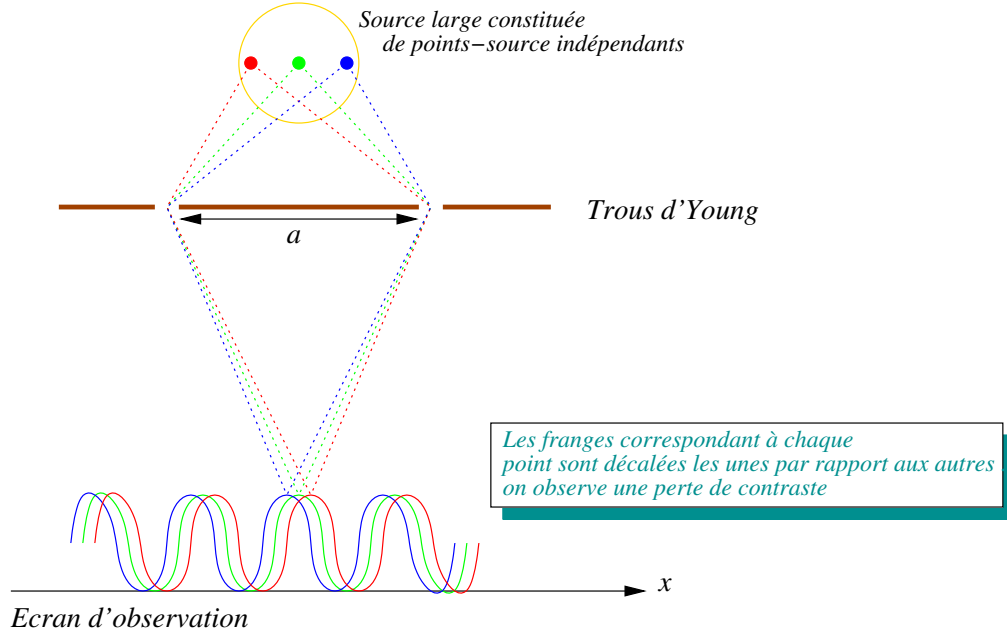
L'intensité produite dans le plan d'observation par l'élément de surface ds' est alors égale à

$$dI(x, y) = 4 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} I_0(x', y') dx' dy' \cos^2\left(\pi a \frac{x - \alpha d}{\lambda d}\right)$$

Soit, en fonction des directions α et β

$$dI(x, y) = 4 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} O(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \cos^2\left(\pi a \frac{x - \alpha d}{\lambda d}\right)$$

On trouve des franges d'Young dont l'origine est située en $x = \alpha d, y = 0$. Ces franges sont produites par l'élément de surface ds' qui se trouve dans la direction α au dessus de l'axe Ox . Lorsque l'on va considérer l'ensemble de la source, on sera amené à intégrer des franges d'Young décalées les une par rapport aux autres comme le schématise la figure ci-après :



L'intensité résultant de l'intégrale sur la source s'écrit, en utilisant l'identité $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$:

$$I(x, y) = 2 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} \iint O(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + 2 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} \iint O(\alpha, \beta) \cos \left(2\pi a \frac{x - \alpha d}{\lambda d} \right) d\alpha d\beta$$

une formule qui paraît compliquée mais qui peut s'écrire très simplement à l'aide de la transformée de Fourier de la fonction $O(\alpha, \beta)$ si l'on utilise les identités $\hat{f}(0) = \int f(x) dx$ et $\cos x = \Re [e^{ix}]$. Ainsi

$$I(x, y) = 2 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} \hat{O}(0, 0) + 2 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} \Re \left[\hat{O} \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right) \exp 2i\pi \frac{ax}{\lambda d} \right]$$

On écrit \hat{O} sous forme trigonométrique : $\hat{O}(u, v) = |\hat{O}(u, v)| \exp i\phi(u, v)$. Il vient

$$I(x, y) = 2 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} \hat{O}(0, 0) + 2 \frac{|K|^2}{\lambda^2 d^2} \left| \hat{O} \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right) \right| \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda d} + \phi \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right) \right)$$

soit encore

$$I(x, y) = \text{Cte} \left(1 + \left| \frac{\hat{O} \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right)}{\hat{O}(0, 0)} \right| \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda d} + \phi \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right) \right) \right)$$

Cette intensité correspond à un système de franges de même période $\lambda d/a$ que dans le cas d'une source ponctuelle. Il y a deux différences :

- Un changement d'origine dû à la phase de \hat{O} . Le système de franges est centré en

$$x_0 = -\frac{\lambda d}{2\pi a} \phi \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right)$$

qui disparaît si la source est symétrique (diaphragme circulaire centré sur l'axe optique par exemple).

- et surtout la présence d'un terme de contraste

$$C(a) = \frac{\left| \hat{O} \left(\frac{a}{\lambda}, 0 \right) \right|}{\hat{O}(0, 0)}$$

qui est indépendant de la position x dans le champ d'interférences, mais dépend de l'écart entre les trous. Si l'on choisit une source symétrique ($\phi = 0$), on observe deux phénomènes quand on fait varier l'écart entre les trous a en l'augmentant à partir de $a = 0$:

1. les franges se resserrent (interfrange proportionnel à $1/a$)
2. le contraste, égal à 1 pour $a = 0$, change avec a (en général il diminue pour des sources classiques)

La figure 1. illustre et résume ces observations dans le cas où la source observée a une distribution angulaire de brillance $O(\alpha, \beta)$ gaussienne ; la T.F. d'une gaussienne étant une gaussienne, la fonction de visibilité des franges (leur contraste) va décroître de manière Gaussienne avec a .

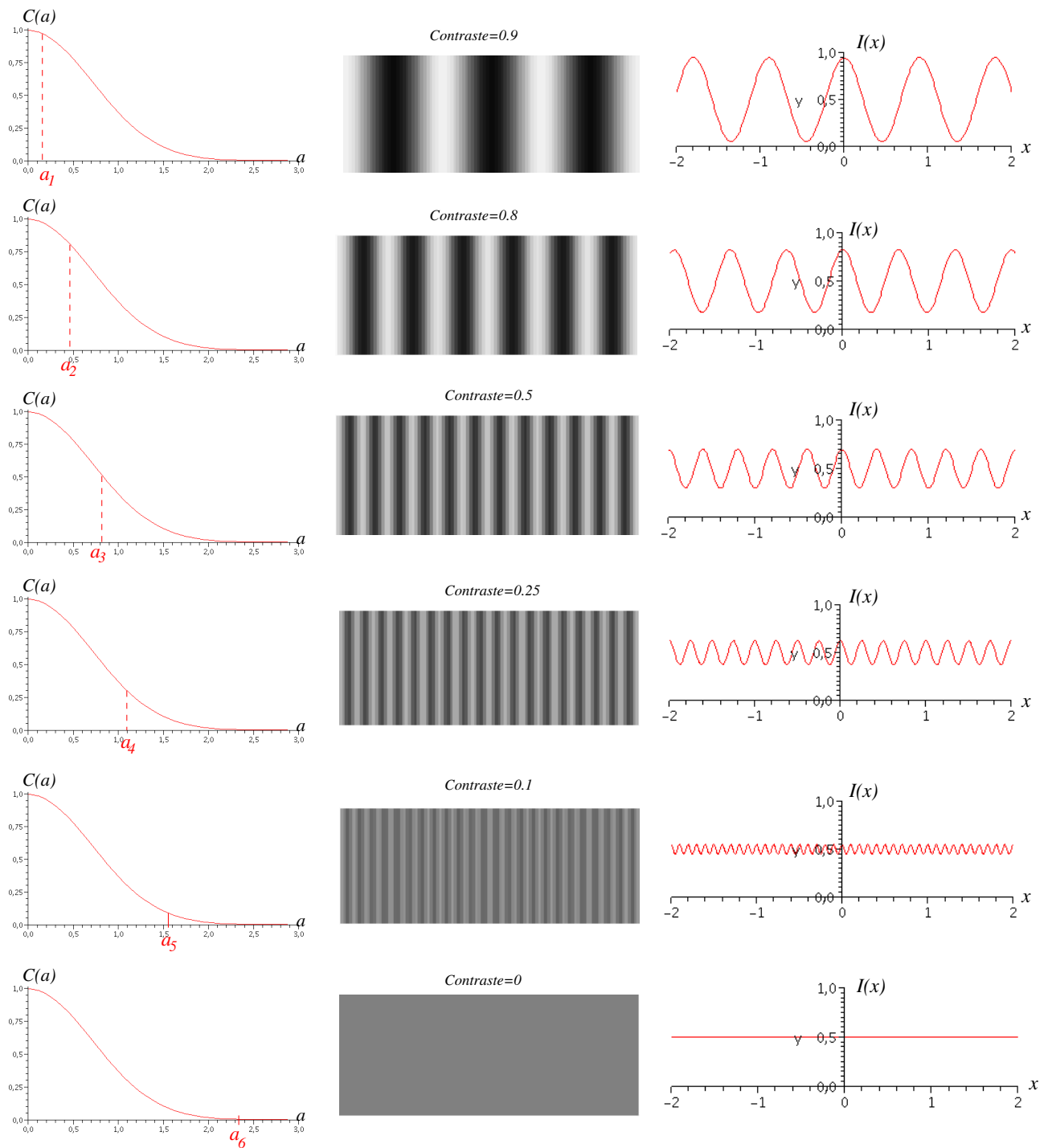


FIGURE 1.1 – Illustration de la perte de contraste des franges lors d’une expérience de trous d’Young éclairés par une source large. Sur la colonne de gauche la fonction contraste $C(a)$ en fonction de la distance a entre les trous. Au milieu l’aspect visuel des franges. A droite le graphe de l’intensité des franges. Les graphes correspondent à 6 écarts différents a_1, a_2, \dots des trous.

1.4 Degré de cohérence spatiale

Soit une source de distribution *angulaire* de brillance $O(\alpha, \beta)$. On appellera **degré de cohérence spatiale** de la source (on parle aussi de **fonction de visibilité complexe**) la quantité

$$\gamma(\vec{\rho}) = \frac{\hat{O}(\frac{\vec{\rho}}{\lambda})}{\hat{O}(\vec{0})} \quad (1.1)$$

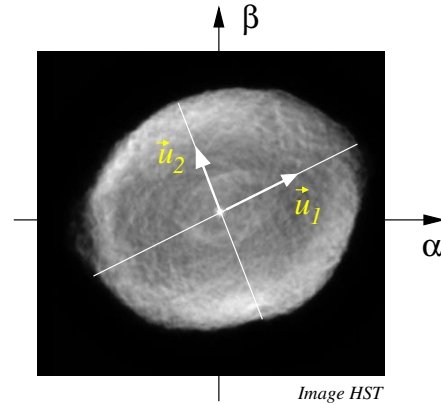
Cette quantité est normalisée, c'est à dire qu'elle vaut 1 pour $\vec{\rho} = \vec{0}$. La quantité non normalisée $\Gamma(\vec{\rho}) = \hat{O}(\frac{\vec{\rho}}{\lambda})$ est parfois appelée *facteur de cohérence spatiale* ou *intensité mutuelle*.

Le module de γ est un nombre réel compris entre 0 et 1 : il mesure le contraste des franges (on parle aussi de *visibilité* des franges) observées lorsque l'on prélève sur le front d'onde deux points distants d'une quantité $\vec{\rho}$. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Van-Cittert - Zernike* (1938). Le contraste vaut 1 lorsque la source est ponctuelle (distribution de brillance proportionnelle à $\delta(\alpha, \beta)$). La direction du vecteur $\vec{\rho}$ est la *ligne de base*. La mesure du contraste permet ainsi d'obtenir un point du module de la T.F de la distribution de brillance $O(\alpha, \beta)$ pour la fréquence angulaire $\frac{\vec{\rho}}{\lambda}$.

Dans l'exemple du paragraphe précédent les trous d'Young prélèvent deux points distants d'une quantité $\vec{\rho} = (a, 0)$ dans le plan (x', y') et font interférer deux ondes sphériques secondaires issues de l'onde principale provenant de la source. La visibilité est donc fonction de $\frac{\vec{\rho}}{\lambda} = (\frac{a}{\lambda}, 0)$ et la ligne de base est l'axe des x' .

1.5 Largeur de cohérence spatiale

On s'intéresse aux cas de sources de taille angulaire finie comme par exemple le disque du Soleil. Pour les sources à symétrie de révolution, on peut définir un diamètre. Pour les autres sources, ce diamètre dépend de l'orientation de la source dans le plan défini par les directions (α, β) . L'image ci-contre est une photographie d'une nébuleuse planétaire prise par le télescope spatial Hubble. C'est une source lumineuse grossièrement elliptique. Son diamètre angulaire n'est pas le même selon qu'il est mesuré dans la direction de vecteur unitaire \vec{u}_1 ou \vec{u}_2

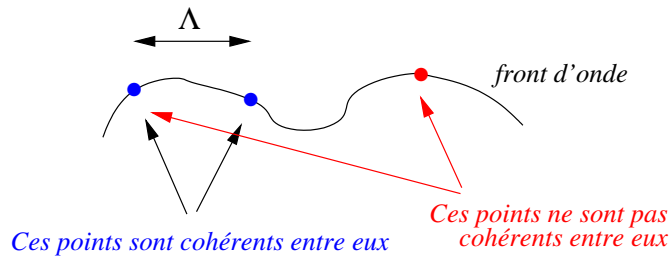


Dans l'expérience de trous d'Young du paragraphe précédent, le contraste des franges est proportionnel à la fonction $|\hat{O}(\frac{a}{\lambda}, 0)|$. Il fait intervenir la transformée de Fourier $\hat{O}(u, v)$ de la distribution de brillance. Or les propriétés générale de la transformation de Fourier imposent que si une fonction $f(x)$ a une largeur Δx dans le plan direct, sa T.F. $\hat{f}(u)$ a une largeur $\Delta u \propto \frac{1}{\Delta x}$ dans le plan de Fourier. Cette propriété se généralise à deux variables : une fonction $f(x, y)$ de largeur Δx dans la direction \hat{x} et Δy dans la direction \hat{y} a une T.F. $\hat{f}(u, v)$ dont la largeur vaut $\Delta u \propto \frac{1}{\Delta x}$ dans la direction \hat{u} et $\Delta v \propto \frac{1}{\Delta y}$ dans la direction \hat{v} . Ainsi, si on appelle $\Delta\theta$ la largeur (diamètre angulaire) de la source $O(\alpha, \beta)$ dans la direction α , la fonction $|\hat{O}(u, 0)|$ est de de largeur proportionnelle à $\frac{1}{\Delta\theta}$ et la fonction contraste $C(a)$ est de largeur proportionnelle à $\frac{\lambda}{\Delta\theta}$: le contraste tend vers 0 lorsque $a \geq \frac{\lambda}{\Delta\theta}$. On définira la **largeur de cohérence spatiale** par

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (1.2)$$

avec $\Delta\theta$ le diamètre angulaire de la source mesuré dans la direction de la base de l'interféromètre (α dans notre exemple).

Physiquement, Λ représente la distance maximale entre deux points du front d'onde pour lesquels les vibrations sont cohérentes. Et si l'on réalise une expérience de trous d'Young, on ne verra plus de franges quand la distance entre les trous devient $> \Lambda$.

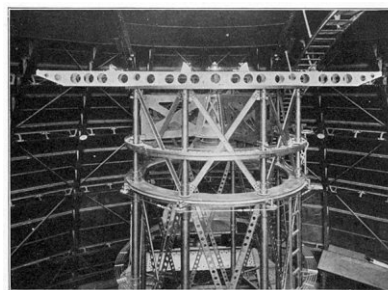


Voici quelques valeurs typiques que l'on rencontre pour Λ en lumière visible :

Etoile Betelgeuse	$\Delta\theta = 0.05$ seconde d'arc	$\Lambda = 2$ m
Le Soleil	$\Delta\theta = 0.5^\circ$	$\Lambda = 57 \mu\text{m}$
Ampoule vue à 1 m	$\Delta\theta = 4^\circ$	$\Lambda = 6 \mu\text{m}$

1.6 Exemple d'application

Dans les années 1920, Michelson et Pease mirent en application le phénomène de disparition des franges d'Young en présence d'une source large pour obtenir les premières mesures de diamètre d'étoiles. Ils équipèrent le télescope de 2.50 m du Mont Wilson d'un rail sur lequel coulevaient deux petits miroirs formant l'équivalent d'un dispositif à trous d'Young avec une base pouvant aller jusqu'à plus de 6 m (photo ci-contre)



En modélisant l'étoile par un disque uniforme de diamètre $\Delta\theta$, on peut écrire sa distribution de brillance

$$O(\alpha, \beta) = K \prod \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\Delta\theta} \right)$$

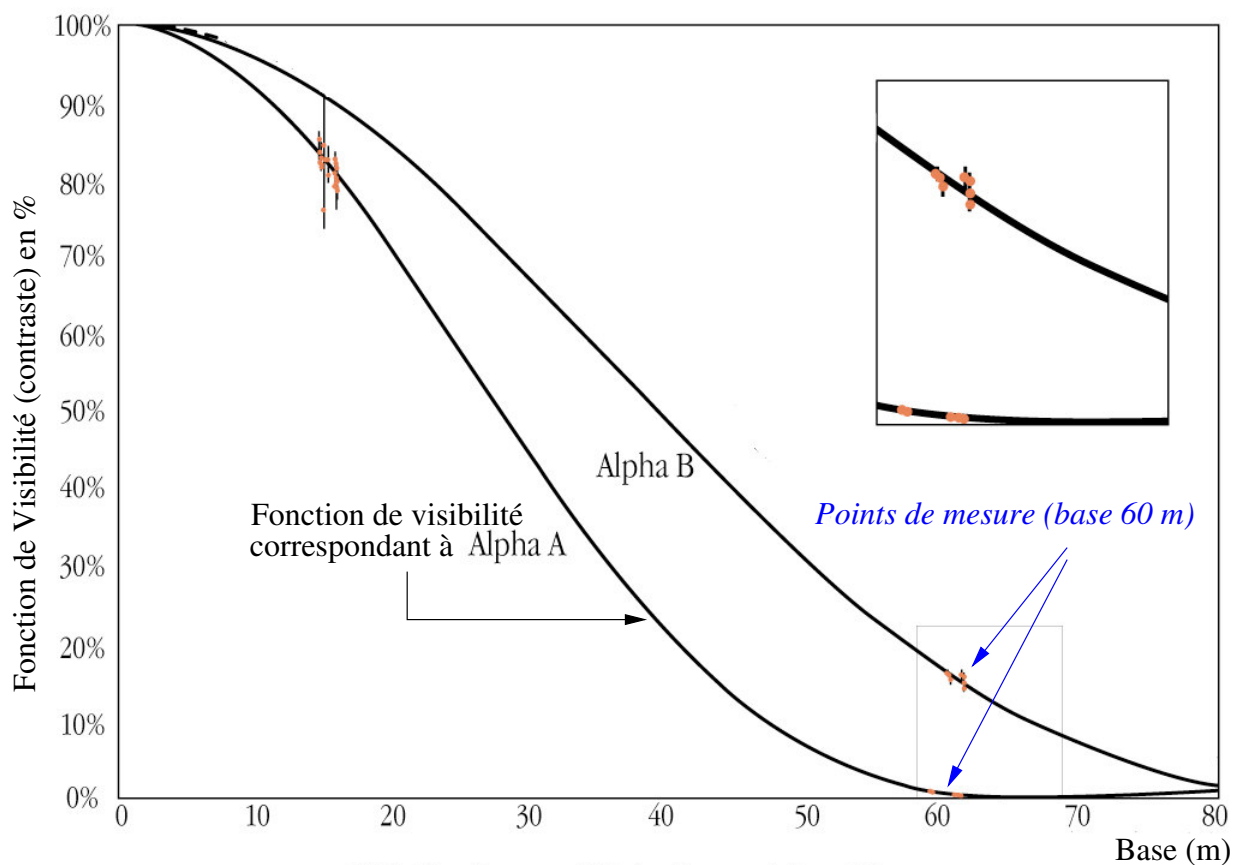
avec K une constante. La fonction contraste $C(a)$ est dans ce cas une fonction de Bessel

$$C(a) = 2 J_{1c} \left(\frac{\pi a \Delta\theta}{\lambda} \right)$$

qui s'annule pour $a = 1.22 \frac{\lambda}{\Delta\theta}$. Ils obtinrent ainsi la première mesure du diamètre de l'étoile Betelgeuse : 0.047 seconde d'arc. La base nécessaire pour obtenir la disparition des franges dans ce cas est de 2.7 m en lumière visible ($\lambda = 500$ nm).

La technique d'interférométrie stellaire de Michelson a ensuite été mise en sommeil pendant une cinquantaine d'années. Jusqu'à ce qu'Antoine Labeyrie réussisse en 1974 à obtenir les premières franges d'interférence utilisant des ouvertures distantes de plusieurs dizaines de mètres et portées par deux télescopes indépendants. Ce furent les débuts de l'interférométrie moderne et ces débuts ont eu lieu dans notre région (l'interféromètre de Labeyrie a été installé sur le plateau de Calern au dessus de Caussols).

Les interféromètres permettent maintenant d'atteindre des diamètres d'étoiles de l'ordre de la milliseconde d'arc. La figure 1.2 montre un exemple d'observation de l'étoile α Centauri effectuée avec le Very Large Telescope Interferometer (VLTI, Chili) en 2003. Le principe de la mesure est toujours basé sur le contraste des franges d'interférences qui donne accès à une valeur du module de la T.F. de la distribution de brillance de la source. On peut en déduire son diamètre mais aussi d'autres informations comme l'éventuelle présence de taches à la surface de l'étoile. Si l'on peut modifier à loisir la base de l'interféromètre (comme c'était le cas pour Michelson et Pease en 1920, leurs miroirs étaient montés sur un rail) on peut mesurer point par point le module de la T.F. de la distribution de brillance (on parle de *couverture du plan de Fourier*).



ESO PR Photo 07d/03 (15 March 2003)

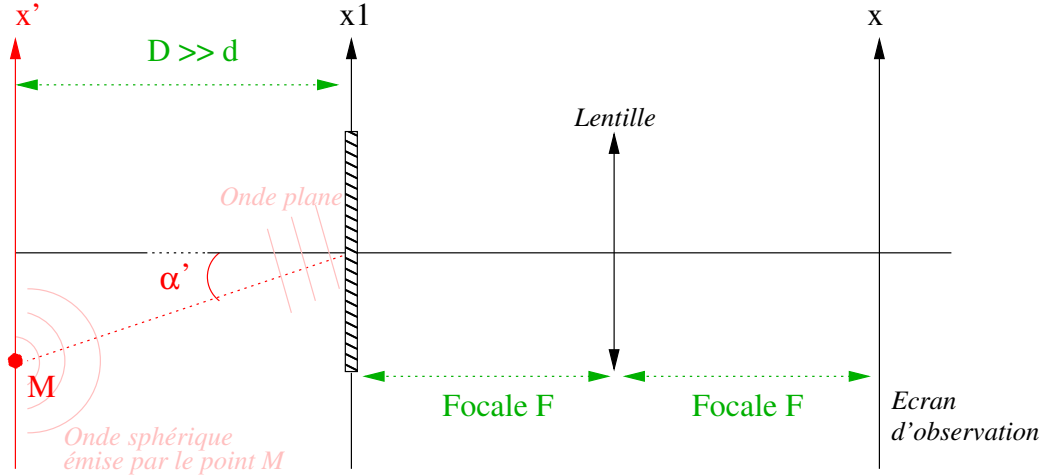
© European Southern Observatory



FIGURE 1.2 – Mesure des fonctions de visibilité des 2 composantes de l'étoile double α Cen faites au VLTI en 2003 (Kervella et al., 2003, A&A 404, 1087). En abscisse la base a de l'interféromètre, en ordonnée le contraste des franges. A partir des mesures faites pour chaque étoile et pour deux bases différentes, on peut ajuster une fonction de Bessel dont le premier zéro donne le diamètre de l'étoile. Les valeurs obtenues ici sont de 8.51 ± 0.02 milliseconde d'arc pour la composante A et 5.86 ± 0.03 pour la composante B.

1.7 Formation d'images en éclairage incohérent

On considère maintenant le problème général : les trous d'Young sont remplacés par un masque quelconque de coefficient de transmission $P(x_1, y_1)$ appelé "fonction pupille". Ce masque est placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente de focale F . On observe dans le plan focal image de la lentille. Le schéma est le suivant :



Plan de la source

Fonction "pupille"

$P(x_1, y_1)$

Comme dans le cas du §1.3, on observe une source large placée dans un plan $(x', y', z = -D)$ (avec D suffisamment grand pour faire l'approximation de la diffraction à l'infini). La source est supposée monochromatique (longueur d'onde λ). Le calcul de l'intensité dans le plan focal de la lentille se fait de la même façon que dans le cas des trous d'Young (paragraphe 1.3) : on s'intéresse à l'amplitude $df(x, y)$ produite par un point de la source situé dans une direction (α', β') , on calcule l'intensité correspondante $dI(x, y)$ et on intègre sur la source.

En utilisant des notations similaires à celle du §1.3, l'amplitude complexe df_0 produite dans le plan pupille par le point M est celle d'une onde plane provenant de la direction (α', β') . Il vient

$$df_0(x_1, y_1) = K d\psi_0 \exp ik(\alpha' x_1 + \beta' y_1)$$

l'amplitude complexe à la sortie du masque est

$$df_1(x_1, y_1) = K d\psi_0 \exp ik(\alpha' x_1 + \beta' y_1) \cdot P(x_1, y_1)$$

Pour passer du plan pupille au plan focal image de la lentille, il faut faire une TF optique (voir chapitre "Filtrage en lumière cohérente"). L'amplitude complexe dans ce plan focal image est donc donnée par

$$df(x, y) = K d\psi_0 \frac{e^{2ikF}}{i\lambda F} \left[\delta \left(u - \frac{\alpha'}{\lambda}, v - \frac{\beta'}{\lambda} \right) * \hat{P}(u, v) \right]_{u=\frac{x}{\lambda F}, v=\frac{y}{\lambda F}}$$

qui se réécrit

$$df(x, y) = K d\psi_0 \frac{e^{2ikF}}{i\lambda F} \hat{P} \left(\frac{x}{\lambda F} - \frac{\alpha'}{\lambda}, \frac{y}{\lambda F} - \frac{\beta'}{\lambda} \right)$$

L'intensité correspondante est alors égale à

$$dI(x, y) = dI_0 \frac{|K|^2}{\lambda^2 F^2} \left| \hat{P} \left(\frac{x}{\lambda F} - \frac{\alpha'}{\lambda}, \frac{y}{\lambda F} - \frac{\beta'}{\lambda} \right) \right|^2$$

avec $dI_0 = O(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'$. En posant $\alpha = \frac{x}{F}$ et $\beta = \frac{y}{F}$ il vient

$$dI(\alpha, \beta) = \frac{|K|^2}{\lambda^2 F^2} O(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \left| \hat{P} \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\lambda}, \frac{\beta - \beta'}{\lambda} \right) \right|^2$$

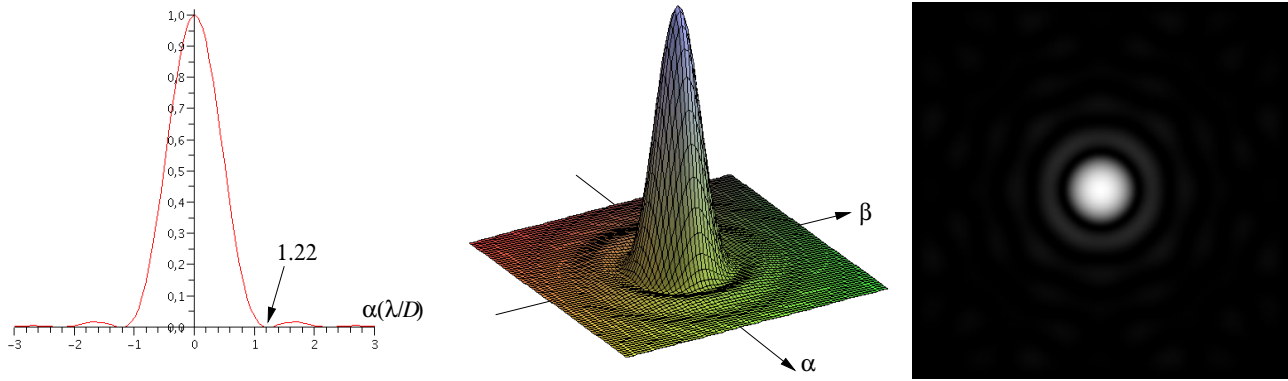


FIGURE 1.3 – Image d’un point-source par une pupille circulaire de diamètre D (réponse impulsionnelle $R(\alpha, \beta)$) : c’est la fonction d’Airy. A gauche la coupe pour $\beta = 0$, au milieu une représentation en perspective cavalière et à droite l’aspect visuel de l’image (une tache entourée d’anneaux).

En posant $Cte = \frac{|K|^2}{\lambda^2 F^2}$, l’intensité résultant de l’intégrale sur la source (α' et β') fait apparaître la relation de convolution objet-image

$$I(\alpha, \beta) = Cte \cdot O(\alpha, \beta) * R(\alpha, \beta)$$

avec

$$R(\alpha, \beta) = \left| \hat{P} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) \right|^2$$

Cette quantité est la réponse impulsionnelle de la formation d’images, c’est l’image qui serait produite par un point-source à l’infini.

Pouvoir de résolution

Un cas particulier important est celui pour lequel $P(x_1, y_1)$ est une fonction porte circulaire de diamètre D . Ce cas de figure est très fréquent dans la mesure où les lentilles (ou objectifs d’appareil photo ou miroirs de télescope) sont généralement taillés avec une section circulaire. Dans ce cas la réponse impulsionnelle est la fonction d’Airy

$$R(\alpha, \beta) = \frac{\pi^2 D^4}{4} J_{1c} \left(\frac{\pi D \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\lambda} \right)^2$$

Le graphe de cette fonction est représentée figure 1.3. Le lobe central de l’image est entouré d’un anneau noir de rayon angulaire $1.22\lambda/D$ (les variables α et β sont des angles).

Si l’on considère un objet constituée de deux points-source séparés d’un angle θ , l’image produite est la somme de deux fonctions d’Airy déparées du même angle : $I(\alpha, \beta) = R(\alpha, \beta) + R(\alpha - \theta, \beta)$. le pouvoir séparateur est défini comme la plus petite valeur de θ pour laquelle les deux taches d’Airy sont discernables. Selon le critère de Rayleigh, ces images sont justes séparées si le maximum de l’une coïncide avec le premier zéro de l’autre, soit pour

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

La figure 1.4 illustre ce critère de Rayleigh. C’est lui qui impose le pouvoir de résolution des télescopes en astronomie : un diamètre de 1 m offre ainsi une résolution de 0.1 seconde d’arc (angle correspondant à une pièce de monnaie vue à 4 km), tandis qu’il faudrait un diamètre de 100 m pour voir un homme sur la Lune (angle de 1 milliseconde d’arc).

Fonction de transfert

La relation objet image est une convolution dans l’espace direct. Dans l’espace de Fourier (variables (u, v)) elle devient un produit

$$\hat{I}(u, v) = Cte \hat{O}(u, v) T(u, v)$$

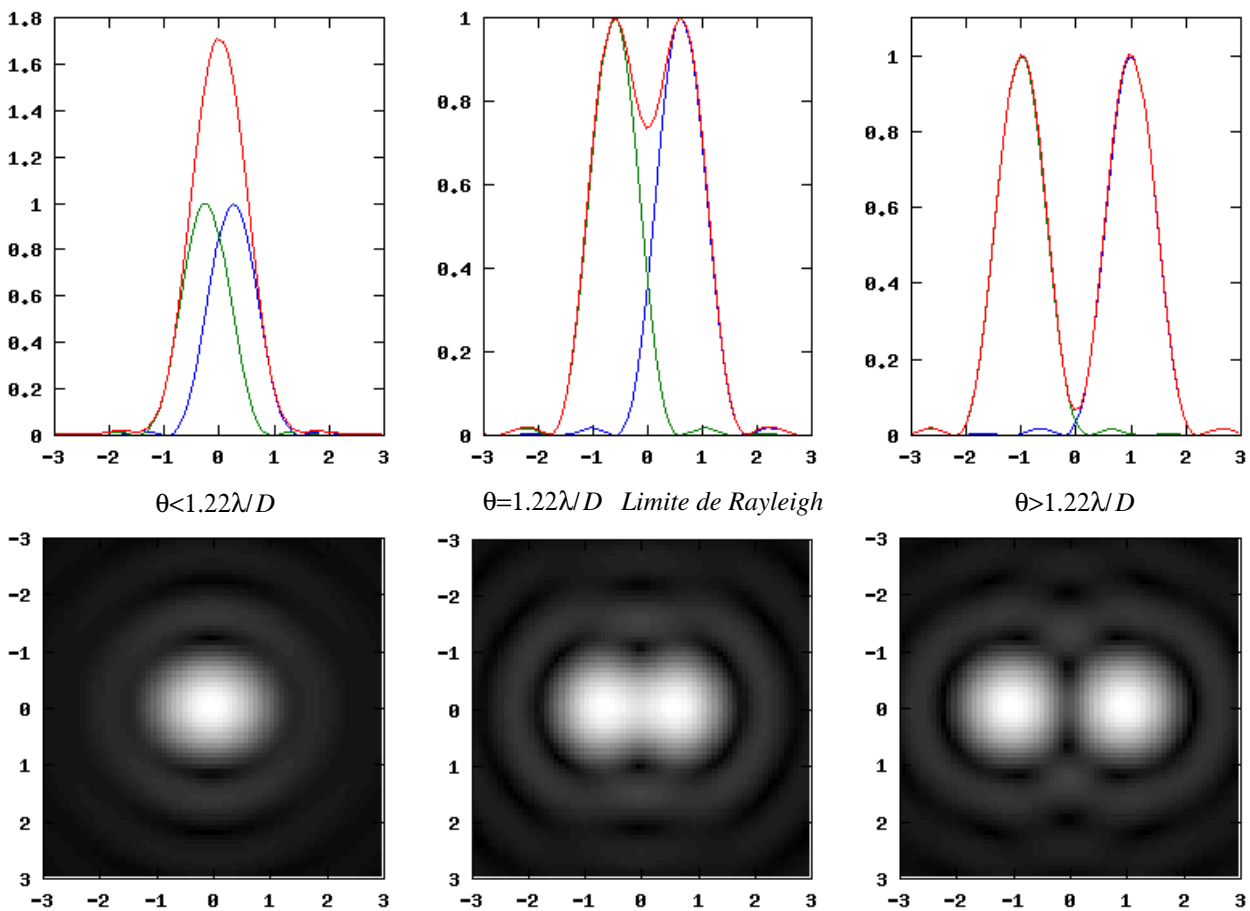


FIGURE 1.4 – Image de deux points-source par une pupille circulaire de diamètre D . La limite de résolution est atteinte lorsque l'angle de séparation entre les deux points-source est égal à $1.22\frac{\lambda}{D}$, c'est le critère de Rayleigh (figures de la colonne du milieu).

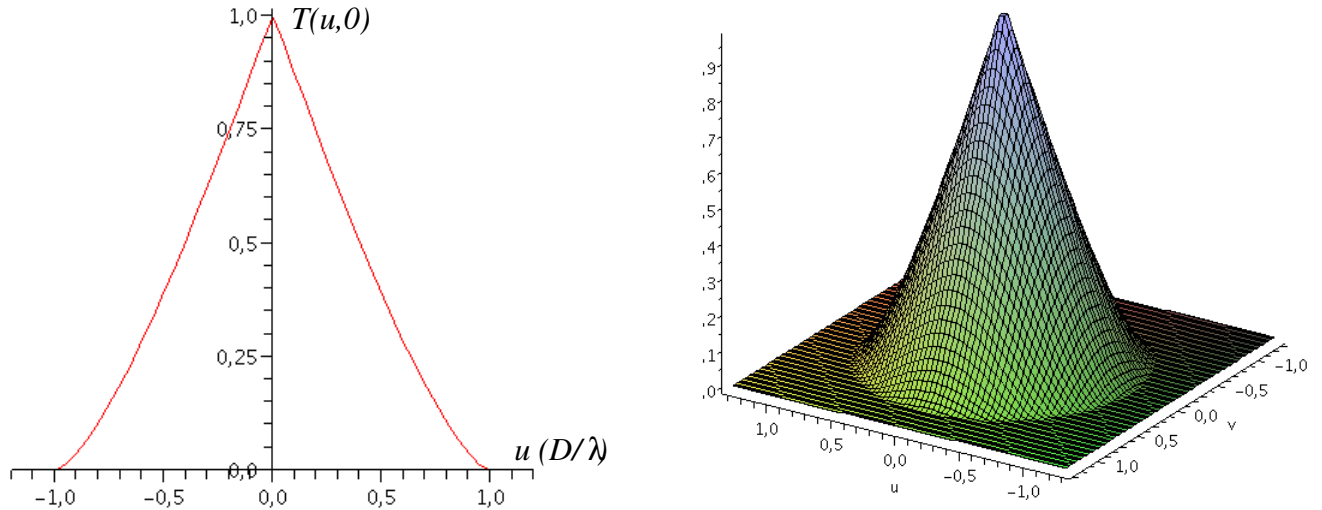


FIGURE 1.5 – Fonction de transfert d’une pupille circulaire de diamètre D (fonction dite “chapeau chinois”). Elle est centrosymétrique et possède une fréquence de coupure $q_c = \frac{D}{\lambda}$.

avec $T(u, v)$ la fonction de transfert qui illustre un filtrage linéaire des fréquences spatiales présentes dans l’objet O . $T(u, v)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $R(\alpha, \beta)$. Il vient, après application du théorème de Wiener-Kinchin :

$$T(u, v) = \lambda^2 C_P(\lambda u, \lambda v)$$

avec C_P l’autocorrélation de la fonction pupille définie par

$$C_P(\lambda u, \lambda v) = \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{P(x, y)} P(x + \lambda u, y + \lambda v) dx dy$$

Il est courant de normaliser la fonction de transfert, c’est à dire de la diviser par sa valeur à l’origine $T(0, 0)$

Fréquence de coupure – Cas d’une pupille circulaire Dans le cas d’une pupille circulaire de diamètre D , la fonction $C_P(\lambda u, \lambda v)$ est l’intégrale de recouvrement de deux disques séparés d’une distance $(\lambda u, \lambda v)$. Le calcul donne (en divisant par la valeur à l’origine)

$$T(u, v) = \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\lambda q}{D} \right) - \frac{\lambda q}{D} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda q}{D} \right)^2} \right]$$

avec $q = \sqrt{u^2 + v^2}$. C’est une fonction centrosymétrique appelée parfois “chapeau chinois”. Son graphe est représenté figure 1.5. Cette fonction possède une fréquence de coupure $q_c = \frac{D}{\lambda}$ au delà de laquelle elle est nulle. Toute fréquence angulaire supérieure à q_c ne sera pas transmise entre l’objet et l’image (ce qui, dans l’espace direct se traduit par le fait que tout détail plus petit que l’angle $\frac{\lambda}{D}$ ne sera pas visible dans l’image).