

Università degli Studi di Genova

Facoltà di Scienze M.F.N.

Anno accademico 2002-2003

Tesi di Laurea in Fisica

Studio del ruolo della turbolenza nella microfisica delle nuvole

Relatori: Prof. R. Festa

Correlatore: Prof. R. Collina

Dott. A. Mazzino

Dott. A. Celani

Candidato: Agnese Seminara

A mia nonna Savina

Indice

1 Strumenti di statistica e probabilità per la turbolenza	1
1.1 Variabili aleatorie e campi stocastici	2
1.2 Teorema del limite centrale	5
1.3 Derivata Funzionale	6
1.4 Teorema di Furutsu-Novikov	11
1.4.1 Teorema di Furutsu-Novikov e δ -correlazione	12
2 Trasporto turbolento	17
2.1 Fenomenologia dei flussi turbolenti	17
2.2 Analisi dimensionale e K41	20
2.2.1 Range inerziale	22
2.2.2 Intermittenza	23
2.2.3 Spettro di energia	26
2.3 Turbolenza bidimensionale	26
2.4 Scalare Passivo	28
2.5 Particelle inerziali	29
2.6 Formalismo lagrangiano	33
2.6.1 Modello di Kraichnan	35
3 Microfisica delle nuvole	39
3.1 Nucleazione	40
3.2 Evaporazione e condensazione	43
3.3 Coalescenza	48
3.4 Ampliamento dello spettro e previsioni del modello	51
4 Condensazione e turbolenza	55
4.1 Modello turbolento	56
4.2 Modelli stocastici	59

4.2.1	Fluttuazioni temporali di soprasaturazione	60
4.3	Fluttuazioni spazio-temporali di soprasaturazione	63
4.4	Effetti della correlazione e analisi numerica	66
5	Analisi numerica	69
5.1	Discretizzazione e metodo pseudospettrale	70
5.2	Scelta dei parametri	71
5.3	Risultati delle simulazioni	76
5.3.1	Correlazione	76
5.3.2	Ampliamento dello spettro	78
A	Codice pseudospettrale	83
A.1	Discretizzazione spaziale e FFT	83
A.2	Discretizzazione temporale	85
A.2.1	Metodo di Eulero	85
A.2.2	Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine	87
A.3	Metodo pseudospettrale e discretizzazione temporale	88
A.4	Stabilità e dealiasing	93

Introduzione

Fisica delle nuvole

Le nuvole costituiscono un gigantesco laboratorio naturale in cui ha luogo una grande varietà di fenomeni fisici che riguardano discipline molto diverse, dalla chimica alla termodinamica alla meccanica dei fluidi. Tali fenomeni coinvolgono una gamma di scale spaziali molto vasta: le goccioline più piccole sono di dimensioni inferiori al micron mentre le gocce di pioggia raggiungono il millimetro. Quest'ultima scala è dell'ordine di grandezza delle più piccole scale caratteristiche del moto turbolento atmosferico mentre le strutture del moto globale della nuvola raggiungono tipicamente dimensioni dell'ordine del km. Questi dati indicano la presenza di un intervallo di circa nove decadi di scale spaziali dinamicamente accoppiate.



Le nuvole sono *aerosol* cioè sospensioni di liquidi (prevalentemente acqua) e solidi (ghiaccio, polveri etc) in un mezzo gassoso (aria). La formazione di preci-

pitazioni come la pioggia o la grandine avviene in tre fasi successive: nucleazione, condensazione e coalescenza.

La prima fase vede la nascita di goccioline embrionali o di micro-cristalli di ghiaccio in un ambiente di vapore acqueo soprasaturo. Per giustificare la quantità di goccioline e micro-cristalli presente nelle nuvole e i tempi tipici impiegati per la loro formazione è necessario ipotizzare la presenza di particelle solide estranee chiamate nuclei di condensazione (CCN). Sulla loro superficie è infatti efficace il processo di deposito e condensazione di molecole di vapore acqueo che prende il nome di nucleazione *eterogenea*. Tale processo risulta favorito rispetto al meccanismo di aggregazione in assenza di CCN, chiamato nucleazione *omogenea*, che richiede condizioni di soprasaturazione molto elevate (300-400%) e risulta quindi inefficace in atmosfera in cui i valori tipici di soprasaturazione superano raramente il 10%. La goccia appena nucleata ha sostanzialmente le dimensioni del CCN attorno al quale si è formata (circa 0.1 micron).

La fase successiva vede l'accrescimento delle goccioline (o dei cristalli) per *condensazione* (o *sublimazione*) determinata dal flusso di molecole di vapore sulla superficie della particella. Tale processo diffusivo è descritto classicamente da un'equazione che assume stazionario lo stato microscopico della gocciolina, considerando quindi le quantità termodinamiche locali costanti su tutta la goccia. In atmosfera la validità di tale assunzione, che chiameremo approssimazione *quasi-statica*, è pienamente giustificata dalle stime del tempo impiegato dalle goccioline per raggiungere l'equilibrio termodinamico. In questa fase le dimensioni delle gocce (o dei cristalli) non superano i 20 micron, ed è quindi possibile trascurarne l'interazione reciproca e considerare quindi l'evoluzione di ogni singola gocciolina isolata.

Quando le dimensioni delle gocce superano i 20 micron ha inizio la fase successiva in cui la crescita è determinata dalla collisione fra le gocce seguita dalla loro unione (*coalescenza*). In questa fase è evidentemente cruciale il ruolo dell'interazione fra le particelle, che quindi non possono più essere considerate indipendentemente le une dalle altre.

Condensazione e turbolenza

In questa tesi ci proponiamo di formulare un modello turbolento di condensazione per le nuvole *calde*, nelle quali la temperatura assume valori compresi fra 0 e 20 °C. Le osservazioni sperimentali sulla popolazione di gocce che emergono dal processo di condensazione rivelano la presenza di un ampio spettro di dimensioni

delle particelle, molto più ampio di quello di partenza che è sostanzialmente determinato dalla distribuzione dei nuclei di condensazione atmosferici.

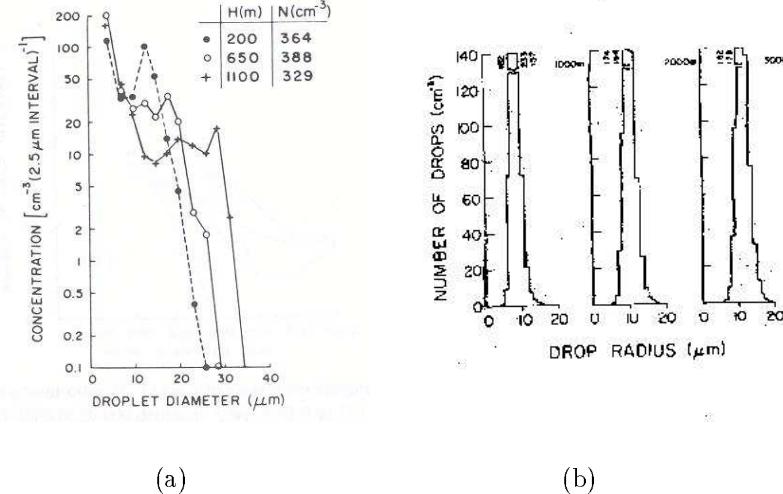


Figura 1: (a) Misure sperimentali dello spettro di dimensioni delle goccioline; (b) spettro delle dimensioni delle gocce previsto dal modello classico di Lee e Pruppacher del 1972 [22].

Come possiamo osservare in fig. 1, il modello classico prevede erroneamente che la forma dello spettro di dimensioni delle gocce resti identica a quella di partenza: dal processo di condensazione emergerebbe una popolazione di gocce con raggi molto simili, caratteristica che attenua molto l'efficacia dei successivi processi d'urto sull'accrescimento dei raggi delle gocce. Tale modello pone l'attenzione su una porzione di spazio (che chiameremo *volume fluido*) molto più piccola dell'intera nuvola, ma comunque molto più grande rispetto alle dimensioni microscopiche in gioco. In atmosfera le dimensioni tipiche del volume fluido sono di circa un litro. Come descritto dettagliatamente nel capitolo 3, il modello sfrutta le equazioni della termodinamica classica e ipotizza che il campo di soprasaturazione $s := \frac{e}{e_s} - 1$ (con e ed e_s rispettivamente tensione di vapore e di vapor saturo) risulti costante in tutto il volume fluido considerato e soddisfi l'equazione di evoluzione:

$$\frac{ds}{dt} = A_1 w - A_2 \frac{d\rho_L}{dt} \quad (1)$$

dove ρ_L è la densità dell'acqua in fase liquida, i coefficienti A_1 e A_2 sono considerati costanti e w è la velocità verticale del volume fluido ($\approx 1 \text{ ms}^{-1}$). L'equazione (1) impone essenzialmente il bilancio fra la crescita della soprasaturazione associata alla velocità verticale, e l'effetto di decadimento (assorbimento) dovuto al cambiamento di fase da vapore a liquido (condensazione).

Il modello classico descrive l'evoluzione del raggio delle goccioline presenti nel volume fluido in funzione delle condizioni ambientali in accordo con l'approssimazione quasi-statica discussa in [34]:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{A_3 s}{r} \quad \Rightarrow \quad r^2(t) = r^2(0) + 2A_3 s t \quad (2)$$

dove A_3 è un coefficiente che dipende dalle quantità termodinamiche locali e può essere considerato costante nel tempo. L'equazione (2) sussiste nella fase di condensazione cioè a partire dalla condizione iniziale $r^2(0)$ determinata dalla precedente fase di nucleazione. Dall'equazione (2), che riguarda l'evoluzione di ogni goccia in un volume fluido, segue la previsione dello spettro di dimensioni delle gocce nell'intera nuvola. A partire dalla distribuzione delle gocce nucleari, esso trasla rigidamente nel tempo con valor medio

$$\langle r^2 \rangle(t) = \langle r^2 \rangle(0) + 2A_3 \langle s \rangle t \quad (3)$$

e varianza costante, pari a quella della distribuzione iniziale. Modelli classici successivi [22] considerano l'immissione di CCN nella nuvola dall'ambiente esterno. La previsione che ne segue risulta comunque giustificare solo le osservazioni sulle nuvole marittime e sotto ipotesi irrealistiche sullo spettro di CCN.

Per la comprensione del fenomeno di ampliamento dello spettro appare cruciale la presenza del trasporto turbolento nella nuvola. Tentativi di inclusione dell'effetto della turbolenza mediante modelli semplificati in cui il campo di soprasaturazione dipenda unicamente dal tempo, si sono rivelati insufficienti. Il modello di Bartlett e Jonas del 1972 assume, per esempio, la presenza di turbolenza omogenea in stato stazionario modellizzata attraverso una velocità verticale casuale distribuita attorno a un valor medio di circa 1 m s^{-1} con tempo di correlazione finito. Dall'equazione di evoluzione (1) si ottiene appunto che un flusso di questo tipo provoca fluttuazioni di soprasaturazione dipendenti dal tempo. I risultati delle simulazioni [2] prevedono una deviazione standard che raggiunge un massimo di $0.26 \mu\text{m}$ con un ampliamento dello spettro trascurabile.

Il fallimento del modello stocastico sopra descritto rende indispensabile l'utilizzo di un approccio numerico fondato sull'analisi teorica del trasporto turbolento reale, descritto nei suoi aspetti generali nel capitolo 2. L'osservazione fondamentale che ci spinge a sviluppare tale modello riguarda la significatività del volume fluido come oggetto di indagine. Consideriamo due goccioline all'interno di un volume fluido inizialmente molto vicine: nel tempo caratteristico associato alla condensazione (circa 10^3 s) il trasporto turbolento determina una separazione notevole delle due goccioline che abbandonano ben presto il volume fluido di partenza e hanno modo di sperimentare i valori di soprasaturazione presenti in tutta la nuvola. Risulta quindi necessario considerare l'evoluzione globale del campo di soprasaturazione.

Per questo motivo ho sviluppato un modello di condensazione, esposto dettagliatamente nel capitolo 4, in cui considero il trasporto turbolento del campo di soprasaturazione da parte del campo di velocità nell'intera nuvola e conseguentemente le strutture spaziali di $s(\mathbf{x}, t)$ a grandi scale. Le equazioni di Navier-Stokes per il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sono quindi accoppiate all'equazione di trasporto per il campo scalare $s(\mathbf{x}, t)$:

$$\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f} \quad (4)$$

$$\partial_t s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla s(\mathbf{x}, t) = A_1 w(\mathbf{x}, t) - \frac{s(\mathbf{x}, t)}{\tau_s} + D_0 \nabla^2 s(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

dove i coefficienti A_1 e D_0 sono considerati costanti in accordo con l'approssimazione quasi-statica dello stato di condensazione e ν è la viscosità cinematica. Nell'equazione di evoluzione (5) il termine di decadimento che compare nell'equazione (1) è parametrizzato dal termine $-\frac{s}{\tau_s}$ in cui τ_s rappresenta il tempo di assorbimento della soprasaturazione. Il valore di questo parametro è determinato dalla distribuzione delle dimensioni delle gocce al variare del tempo e in prima approssimazione può essere considerato costante nel tempo (si veda discussione in [29]). Il campo scalare s non può più essere considerato uniformemente distribuito in tutta la nuvola in quanto presenta fluttuazioni elevate dovute al carattere turbolento del trasporto nella nuvola stessa. A grandi scale quest'ultimo è infatti organizzato in zone fortemente soprasature, caratterizzate da valori molto intensi di s , separate da zone fortemente sottosature, in cui s assume valori molto minori, come mostrato in fig. 3(b).

Nel modello che ho sviluppato l'evoluzione del raggio di ogni gocciolina è descritta in approssimazione quasi-statica dall'equazione classica (2) in cui però il

campo di soprasaturazione è determinato dalla soluzione del sistema di equazioni (4) e (5) calcolata sulla traiettoria della gocciolina. Se esiste una correlazione fra le traiettorie delle gocce e l'intensità del campo s è possibile che una frazione di gocce trascorra un tempo prolungato nelle porzioni di spazio fortemente soprasature, e abbia quindi modo di accrescere considerevolmente le proprie dimensioni. Analogamente è possibile che una frazione di gocce, trovandosi in porzioni di spazio fortemente sottosature sia costretta a crescere a un ritmo molto più lento o addirittura a evaporare. L'idea sviluppata nell'ambito della tesi consiste nella valutazione di tale effetto di correlazione che evidentemente fornisce un'interpretazione qualitativa del fenomeno di ampliamento dello spettro.

Nell'analisi teorica del modello di condensazione turbolenta introdotto ho considerato un campo di soprasaturazione stocastico dipendente dallo spazio e dal tempo in modo da poter valutare l'effetto delle strutture spaziali del campo scalare sull'ampliamento dello spettro. In tale ipotesi l'equazione di evoluzione per lo spettro di dimensioni delle gocce (equazione di Fokker-Planck) non è chiusa ma consente comunque di ottenere un'espressione per la varianza dello spettro: questa risulta dipendente dalla correlazione fra le traiettorie delle goccioline e il campo scalare.

La valutazione quantitativa di tale correlazione richiede un'analisi numerica del sistema di equazioni incluse nel modello. Simulazioni numeriche complete di un sistema caratterizzato dal numero di gradi di libertà di una nuvola ($\propto 10^{27}$) non sono realizzabili con gli attuali strumenti di calcolo. Questo rende inevitabile un'analisi parziale del sistema e una scelta degli aspetti che si ritengono fondamentali. Simulazioni numeriche che risolvono piccole porzioni di nuvola, che si possono vedere in [35], non prevedono un ampliamento sufficiente dello spettro. Il motivo di questa previsione si può comprendere qualitativamente osservando che le fluttuazioni di w in un volume fluido risultano trascurabili rispetto alla velocità media di salita. Il modello equivale in tal caso a considerare un valore della velocità verticale del volume fluido sostanzialmente costante, riducendo l'equazione di evoluzione (5) all'equazione classica (1).

Intendiamo perciò indagare teoricamente e numericamente l'influenza della *turbolenza di grande scala* sul processo di condensazione rinunciando alla descrizione dettagliata del comportamento alle piccole scale. Nel capitolo 5 sono presentate simulazioni di un flusso turbolento *bidimensionale* che permette, a parità di risorse, una risoluzione maggiore e presenta, in un regime opportuno, una fenomenologia simile al caso tridimensionale. Le simulazioni descrivono accuratamente la dinamica a grandi e medie scale (da 1 km a 10 m) e utilizzano i modelli classici per le scale da 10 m a 1 micron (*subgrid scales*).

Risultati e sviluppi futuri

Riassumendo, l'oggetto di questa tesi è dunque lo studio del processo di condensazione nelle nuvole con particolare attenzione al fenomeno di ampliamento dello spettro delle dimensioni delle gocce. I modelli classici non sono infatti in grado di interpretare tale fenomeno. Ho affrontato il problema formulando un modello di condensazione turbolento che ho analizzato teoricamente e numericamente. L'analisi teorica suggerisce l'importanza della correlazione fra le traiettorie delle gocce e il campo di soprasaturazione, favorita dalle proprietà spaziali attribuite a s grazie all'introduzione del trasporto turbolento. Ho quindi valutato quantitativamente tale effetto attraverso una serie di simulazioni numeriche.

Più nel dettaglio il modello turbolento introdotto in questa tesi prevede:

- l'introduzione della dinamica del campo di velocità regolata dalle equazioni di Navier-Stokes;
- la schematizzazione del campo di soprasaturazione come scalare passivo;
- l'adozione dell'approssimazione quasi-statica per lo stato di condensazione microscopico;
- la descrizione delle goccioline come particelle fluide di cui si trascura l'inerzia.

L'analisi dettagliata di ogni punto è sviluppata nel corso della trattazione sia in un contesto generale (capitolo 2) sia nel contesto specifico del problema della condensazione nelle nuvole (capitolo 4).

L'analisi teorica del modello turbolento introdotto sfrutta la modellizzazione stocastica dei campi di velocità e di soprasaturazione. A differenza dei modelli stocastici noti si considerano qui fluttuazioni di soprasaturazione dipendenti dallo spazio oltre che dal tempo. Tale generalizzazione rende impossibile la risoluzione analitica dell'equazione per lo spettro delle dimensioni delle gocce e fornisce quindi solo una stima approssimata delle proprietà statistiche di tale distribuzione. Il valor medio e la varianza della distribuzione sono determinati da operazioni di media dello scalare s sulle traiettorie delle goccioline che coinvolgono direttamente la correlazione fra la soprasaturazione e le traiettorie stesse. In questo senso l'analisi del modello indica che il ruolo di tale correlazione risulta cruciale nella determinazione dello spettro. In particolare il suo duplice effetto sulla varianza e sul valor medio della distribuzione indica la possibilità di un ampliamento dello spettro e di una crescita per condensazione anche in ambienti sottosaturi.

Il problema è stato qui affrontato numericamente per ottenere la valutazione quantitativa di tali effetti di correlazione.

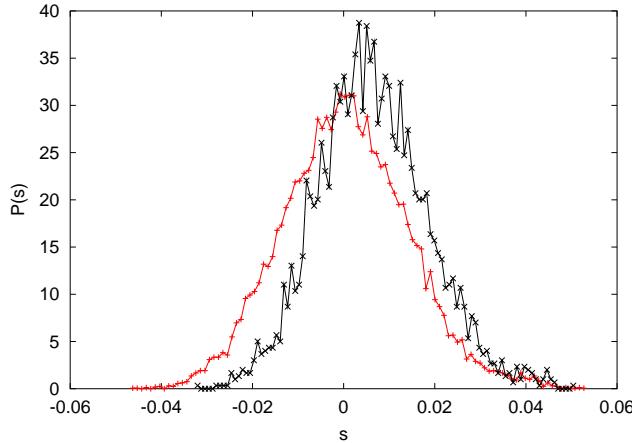


Figura 2: Distribuzioni di probabilità euleriana (in rosso) e lagrangiana (in nero) della soprassaturazione al tempo $t=500$ s. Si noti come la distribuzione lagrangiana sia traslata rispetto a quella euleriana: i valori di soprassaturazione sperimentati dalle goccioline sono superiori a quelli previsti dalla statistica puntuale.

Nelle simulazioni si integrano le equazioni di evoluzione di un flusso bidimensionale stazionario accoppiate alle equazioni di trasporto di uno scalare passivo (s) e di molte particelle fluide (goccioline) il cui raggio evolve in accordo con l'equazione classica (2) (approssimazione quasi-statica). Come anticipato, le goccioline sono assimilate a particelle fluide, sono stati quindi trascurati gli effetti dovuti alla maggiore densità delle goccioline rispetto al fluido. La validità di questa approssimazione è giustificata in fase di condensazione dal valore assunto dal numero di Stokes (St) e sarà discussa nel capitolo 4. Come anticipato le scale spaziali risolte variano nell'intervallo da 1 Km a 10 m.

In primo luogo ho valutato l'effettiva esistenza di una correlazione fra le traiettorie delle particelle fluide e lo scalare s . Ho ottenuto tale valutazione attraverso un confronto fra due diverse distribuzioni di probabilità dello scalare: quella euleriana, valutata su tutti i punti della griglia, e quella lagrangiana, valutata sulle traiettorie delle particelle. Il risultato del confronto fra le due distribuzioni, riportate in fig. 2, mostra che le particelle fluide sperimentano valori dello scalare superiori a quelli previsti dalla statistica euleriana, risultato che conferma una correlazione positiva fra la soprassaturazione e le traiettorie delle goccioline. Tale

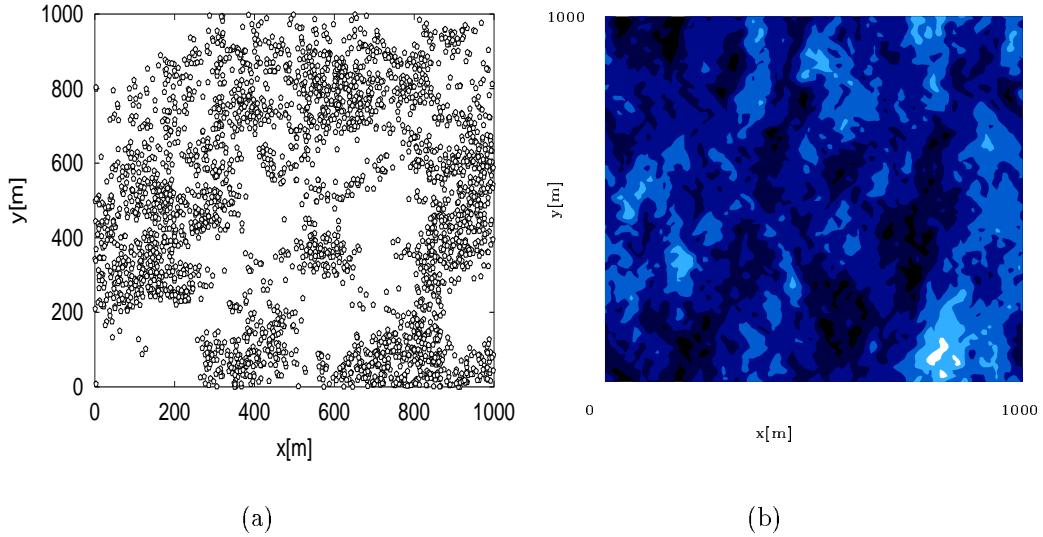


Figura 3: (a) Distribuzione spaziale delle goccioline; (b) distribuzione spaziale di soprasaturazione, in bianco sono mostrate le zone soprasature, in blu quelle sottosature. Si noti la forte correlazione fra la soprasaturazione e la distribuzione spaziale delle goccioline che risultano preferenzialmente concentrate nelle zone soprasature.

risultato è ulteriormente convalidato dall'osservazione della distribuzione spaziale delle goccioline in fig. 3(a). Dal confronto con la fig 3(b) esse risultano preferenzialmente concentrate nelle porzioni di spazio caratterizzate da valori positivi dello scalare. Se infatti una gocciolina si trova per molto tempo in una porzione di spazio fortemente sottosatura è possibile che evapori completamente, contribuendo quindi alla sottrazione di goccioline dalle zone sottosature.

In secondo luogo ho valutato l'esistenza e l'efficacia di un effetto della correlazione sull'evoluzione della distribuzione delle dimensioni delle goccioline: i risultati mostrano che tale effetto è presente e quantitativamente rilevante per il fenomeno di ampliamento dello spettro. In fig. 4 è riportata la distribuzione delle dimensioni delle gocce a tempi diversi.

Dopo circa 7 minuti si verifica un allargamento sufficiente dello spettro affinché una buona parte (circa il 45 %) delle gocce superi un raggio di 20 micron, dimensioni che attivano in maniera efficace i processi d'urto.

Infine la fig. 5 riporta l'evoluzione del raggio medio delle goccioline. Nonostante il valor medio della soprasaturazione sia nullo (ambiente saturo) la simula-

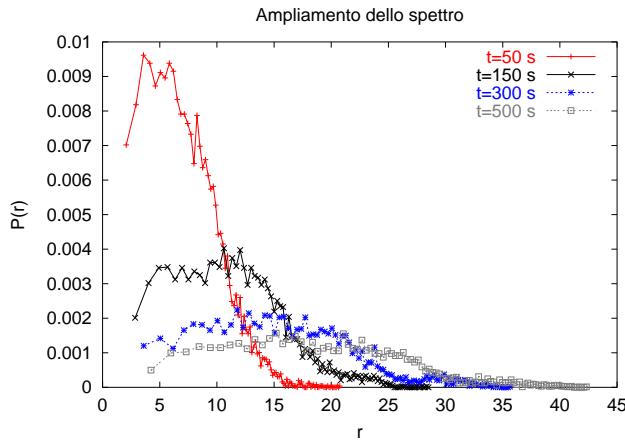


Figura 4: Spettro delle dimensioni delle goccioline previsto dalla simulazione con $\tau_s = 25\text{ s}$: dopo circa 7 minuti una buona parte di goccioline (circa il 45 %) supera un raggio di $20 \mu\text{m}$.

zione mostra un aumento del raggio medio. Tale risultato indica la possibilità che il processo di condensazione avvenga anche in ambienti mediamente sottosaturi, condizioni che possono verificarsi all'interno di una nuvola.

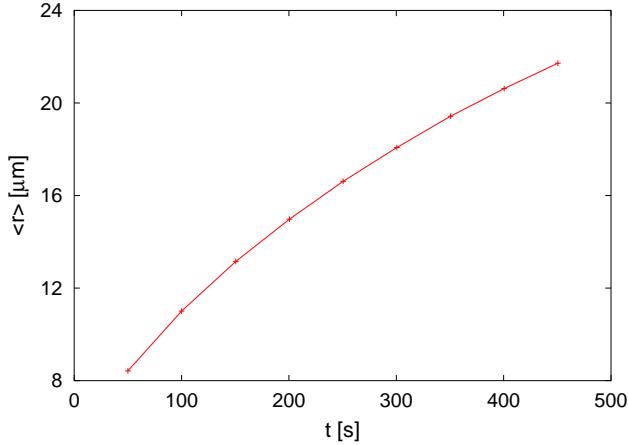


Figura 5: Evoluzione temporale del raggio medio delle goccioline, calcolata assumendo $\bar{s} = 0$. Il modello turbolento prevede la possibilità di aumento delle dimensioni per condensazione anche in un ambiente in cui il valor medio di soprasaturazione sia nullo, eventualità esclusa dal modello classico.

I risultati delle simulazioni dipendono dalle fluttuazioni dello scalare a grande scala. La scelta dei parametri delle simulazioni, motivata dettagliatamente nel § 5.2, è quindi delicata per la valutazione quantitativa dell'effetto realmente prodotto dalla correlazione nelle nuvole. È opportuno sottolineare l'importanza del parametro τ_s che determina l'ampiezza delle fluttuazioni dello scalare: sono presentate simulazioni relative al caso limite di *bassa frequenza*, cioè per valori di τ_s minori della scala temporale delle fluttuazioni turbolente (τ_f) associate alla minima scala risolta. La significatività di tale caso è giustificata dal valore del numero di Damköhler $D_s = \frac{\tau_f}{\tau_s}$ ed è discussa nel capitolo 4. Si noti che l'introduzione di un numero realistico di goccioline ($\sim 10^{18}$), che porrebbe insormontabili problemi numerici, non è necessaria nella fase di condensazione in cui l'interazione fra le gocce è trascurabile.

Un miglioramento dei risultati ottenuti si può perseguire anzitutto attraverso un aumento della risoluzione tale da consentire la descrizione dettagliata di un intervallo di scale spaziali più ampio. In particolare, risolvendo le scale spaziali da 1 km a 1 m sarà possibile analizzare il regime di alte frequenze per le minime scale spaziali risolte, alle quali il numero di Damköhler è massimo. Sarà inoltre possibile la valutazione degli effetti di inerzia attraverso l'inclusione di termini proporzionali a St nell'equazione di evoluzione delle goccioline che non risultano quindi schematizzate come particelle fluide. Con l'inclusione dell'inerzia nella dinamica delle goccioline mi propongo di studiare gli urti fra le particelle e il meccanismo di crescita per collisione e coalescenza in flussi atmosferici turbolenti.

L'esposizione del lavoro di tesi è organizzata come segue:

- Il primo capitolo è dedicato all'introduzione degli strumenti matematici necessari alla trattazione statistica della turbolenza. In particolare sono descritti gli aspetti principali della teoria dei processi stocastici inquadra-ta in ambito probabilistico. È inoltre introdotta la nozione di derivata funzionale, strumento indispensabile per l'applicazione del metodo di integrazione gaussiana per parti che permette lo sviluppo del calcolo integrale per processi stocastici gaussiani.
- Il secondo capitolo presenta le caratteristiche peculiari del trasporto turbolento. In particolare è esposta la teoria di scala di Kolmogorov del 1941 per il campo di velocità, sfruttata per riprodurre le caratteristiche turbolente del flusso atmosferico. È inoltre presentata nei suoi aspetti generali la teoria del trasporto di particelle inerziali (goccioline) e dello scalare passivo (soprasaturazione). È infine descritto il modello di Kraichnan uti-

le per la comprensione della trattazione teorica dei modelli stocastici di condensazione.

- Nel terzo capitolo è descritto nel dettaglio il modello classico di condensazione con particolare attenzione alle ipotesi assunte e alle previsioni ottenute. È inoltre precisato il ruolo del volume fluido nell'ambito di tale modello.
- Il quarto capitolo è dedicato all'analisi teorica degli effetti del trasporto turbolento sulla condensazione. Si descrive il modello turbolento completo introducendo il trasporto passivo del campo di soprasaturazione e la modellizzazione delle goccioline come particelle fluide. Particolare attenzione è dedicata alla valutazione quantitativa della validità delle ipotesi assunte (limite di basse frequenze, modello di particelle fluide per le goccioline e approssimazione quasi-statica). Successivamente si presenta la modellizzazione stocastica dei campi turbolenti sia per fluttuazioni temporali (modello di Bartlett e Jonas) sia per fluttuazioni dipendenti dallo spazio oltre che dal tempo. Quest'ultimo modello fornisce l'interpretazione dell'analisi numerica presentata nel capitolo successivo.
- Nel quinto capitolo sono presentate le simulazioni numeriche dirette del modello descritto nel capitolo 4 effettuate attraverso il metodo di integrazione pseudo-spettrale. Sono inoltre discusse nel dettaglio le scelte dei parametri per le simulazioni e l'importanza della descrizione delle grandi e medie scale. I risultati delle simulazioni forniscono una previsione quantitativa della correlazione fra le traiettorie delle goccioline e il valore di soprasaturazione che ha come conseguenza un ampliamento rilevante dello spettro.

Capitolo 1

Strumenti di statistica e probabilità per la turbolenza

In questo capitolo intendiamo fornire una descrizione degli strumenti matematici utilizzati nel seguito. Riteniamo utile riservare un capitolo introduttivo alla descrizione di tali nozioni al fine di evitare un'esposizione frammentaria del lavoro. In particolare richiamiamo i principali concetti relativi alla teoria delle variabili aleatorie e dei campi stocastici, illustriamo il teorema del limite centrale e introduciamo la derivata funzionale, strumento indispensabile per l'applicazione del Teorema di Furutsu-Novikov, diffusamente utilizzato nel seguito.

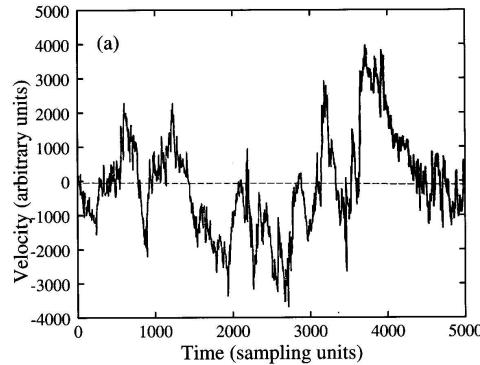


Figura 1.1: Traccia temporale della velocità in un tunnel a vento con $Re = 2720$ in funzione del tempo (misurato in unità di campionamento). Da [10].

L'utilità di questi strumenti risulta evidente se osserviamo le caratteristiche ti-

piche del campo di velocità di un fluido in regime turbolento. La fig. 1.1 mostra, infatti, che un segnale turbolento appare altamente disorganizzato e presenta strutture a tutte le scale: il suo comportamento dettagliato è impredicibile. Tali caratteristiche rendono necessaria una trattazione *statistica* del flusso, che permette di introdurre grandezze riproducibili ripristinando la predicitività del fenomeno. Il flusso di cui si tratta ubbidisce a equazioni differenziali non-lineari (equazioni di Navier-Stokes). Come si inseriscano casualità e caos in un contesto puramente deterministico è oggetto di indagine in [10].

1.1 Variabili aleatorie e campi stocastici

Consideriamo uno spazio Ω dotato di una misura \mathcal{P} e indichiamo con \mathcal{T} gli insiemi misurabili. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ è detto *spazio di probabilità* se la misura \mathcal{P} soddisfa la proprietà $\mathcal{P}(\Omega) = 1$. In questo caso si dice che \mathcal{P} è una misura di *probabilità* e gli insiemi misurabili \mathcal{T} dello spazio Ω sono detti *eventi*. Qualunque applicazione misurabile X da uno spazio di probabilità Ω a un generico spazio misurabile $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, con \mathcal{M} misura di probabilità sullo spazio \mathcal{E} , si chiama *variabile aleatoria o casuale*.

Se \mathcal{E} è un insieme finito o numerabile si dice che la variabile aleatoria è *discreta*, altrimenti si dice che essa è *continua*.

La legge P_X della variabile aleatoria X è la composizione di funzioni $\mathcal{P} \cdot X^{-1}$, cioè la misura di probabilità di tutti gli insiemi misurabili dello spazio di arrivo \mathcal{E} indotta dalla misura di probabilità presente nello spazio degli eventi Ω :

$$P_X(A) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}.$$

Nel caso finito la legge di X è conosciuta a partire dalle probabilità dei singoli eventi. Se \mathcal{E} coincide con \mathbf{R} si dice che la variabile aleatoria è *numerica* o *scalare*. Nel caso in cui \mathcal{E} coincida con \mathbf{R}^n si attribuisce alla variabile un carattere *vettoriale*.

Consideriamo una variabile numerica continua: gli insiemi misurabili¹ dello spazio di arrivo \mathbf{R} sono tutti quelli contenuti nella σ -algebra di Borel \mathcal{B} (per le nozioni fondamentali di teoria della misura si veda per esempio [18]). Sotto

¹ Consideriamo \mathbf{R} con la misura di Lebesgue.

opportune ipotesi², la legge si può scrivere sotto forma di integrale:

$$P_X(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x)dx.$$

In questo caso $p(x)$ è detta *densità di probabilità* della variabile X .

Se la variabile numerica X è integrabile rispetto alla misura di probabilità P si dice che $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega)$ è il suo *valor medio*. Se esso è nullo, la variabile si dice *centrata*. Il *momento di ordine n* della variabile casuale X è dato da:

$$\langle [X - E(X)]^n \rangle = \int_{\mathbb{R}} dP_X(x) [x - E(X)]^n .$$

In particolare, se $n = 2$, si ottiene la *varianza* $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, che misura la dispersione dei valori assunti dalla variabile casuale.

Una variabile casuale centrata è detta *gaussiana* se la sua densità di probabilità risulta pari a:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} .$$

Le definizioni precedentemente introdotte per variabili aleatorie scalari possono essere generalizzate in modo naturale a variabili vettoriali d -dimensionali. Se $\langle \mathbf{X} \rangle = 0$ si può introdurre il tensore di *covarianza* $\Gamma_{\mu\nu} = \langle X_{\mu} X_{\nu} \rangle$. Per conservare l'invarianza della proprietà di gaussianità per trasformazioni lineari non è sufficiente che ogni componente X_i di \mathbf{X} sia gaussiana: \mathbf{X} è detta gaussiana se e solo se tale è la quantità scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$.

La *correlazione* è definita dal rapporto:

$$\frac{\langle X_{\mu} X_{\nu} \rangle}{\sqrt{\langle X_{\mu}^2 \rangle \langle X_{\nu}^2 \rangle}} \quad (\text{non sommata su } \mu, \nu) .$$

Una generalizzazione dei concetti fin qui esposti è costituita dall'introduzione dei *campi casuali* o *processi stocastici*. Si definisce campo stocastico un insieme di variabili casuali indicizzato da indici continui che qui identifichiamo con un indice temporale e tre spaziali.

²In questa sede non ci occupiamo nel dettaglio delle suddette ipotesi, per approfondimenti si veda [6].

Le quantità statistiche relative ai campi casuali sono definite punto per punto e ad ogni istante come estensione naturale delle definizioni introdotte per le variabili casuali, sono quindi campi scalari, funzioni dei quattro indici spazio-temporali.

Possiamo introdurre tre ulteriori grandezze caratteristiche dei campi stocastici:

1. La funzione di covarianza spazio-temporale (detta anche correlazione) è definita dalla seguente relazione:

$$\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle X_\mu(\mathbf{r}, t) X_\nu(\mathbf{r}', t') \rangle. \quad (1.1)$$

Se vale $\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = S(\mathbf{r} - \mathbf{r}')Q(|t - t'|)$, il campo stocastico è detto *omogeneo e stazionario*. Se inoltre $Q(|t - t'|) = \delta(t - t')$ il campo stocastico è detto δ -correlato nel tempo.

2. Facendo coincidere i punti e gli istanti in cui si calcolano i campi nella (1.1) si ottiene il secondo oggetto di interesse per la trattazione, il valore della covarianza a punti uniti:

$$\langle X_\mu(\mathbf{r}, t) X_\nu(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (1.2)$$

Per campi stazionari e omogenei tale valore non dipende da (\mathbf{r}, t) : campi di questo tipo sono statisticamente costanti nello spazio e nel tempo.

3. A partire dalle (1.1), (1.2) è possibile costruire la generica *funzione di struttura di ordine n*. In particolare siamo interessati all'ordine $n = 2$:

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle [X_\mu(\mathbf{r}, t) - X_\mu(\mathbf{r}', t')][X_\nu(\mathbf{r}, t) - X_\nu(\mathbf{r}', t')] \rangle.$$

Un campo stocastico $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ è detto *campo gaussiano* se per ogni funzione di prova $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ risulta gaussiana la quantità:

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{r} \int_{\mathbb{R}} dt \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{r}, t).$$

1.2 Teorema del limite centrale

L'importanza assunta dalla distribuzione di probabilità gaussiana nella teoria dei processi stocastici è legata al Teorema del limite centrale.

Consideriamo un insieme di n variabili aleatorie X_1, \dots, X_n indipendenti. La distribuzione di probabilità di ogni variabile X_i sia $p_i(X_i)$. Supponiamo inoltre:

$$\begin{aligned} < X_i > &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n; \\ \sigma^2(X_i) &= b_i. \end{aligned}$$

Si definisce la variabile somma:

$$S := \sum_{i=1}^n X_i, \tag{1.3}$$

con varianza $\sigma_S^2 = \sigma^2(S) = \sum_{i=1}^n b_i$.

Nell'ipotesi in cui, per ogni $t > 0$, sia soddisfatta la *Condizione di Lindeberg*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x|>t\sigma_n} x^2 p_i(x) dx \right] = 0,$$

si dimostra che la distribuzione della variabile rinormalizzata $\frac{S}{\sigma_S}$ nel limite per $n \rightarrow \infty$ tende alla Gaussiana con media nulla e varianza unitaria (si veda per esempio [9]).

Si noti che, con opportune modifiche, il risultato è applicabile anche sotto ipotesi meno restrittive. Supponiamo infatti che non tutti gli addendi in (1.3) siano indipendenti fra loro, ma che le variabili dipendenti possano essere raggruppate in N sottoinsiemi A_j fra loro indipendenti. Si possono allora definire le somme parziali $Y_j = \sum X_{aj}$, $X_{aj} \in A_j$, che sono variabili casuali indipendenti a media nulla e varianza $b'_j = \sum b_{aj}$, con $b_{aj} = \sigma^2(X_{aj})$, $X_{aj} \in A_j$. La sommatoria che definisce S si può in tal caso riorganizzare nella seguente forma:

$$S = \sum_{j=1}^N Y_j,$$

e la sua varianza è $\sigma_S^2 = \sum_{j=1}^N b'_j$. Il Teorema del limite centrale può essere applicato all'insieme delle somme parziali A_j e la distribuzione della variabile

rinormalizzata $\frac{S}{\sigma_S}$ tende alla gaussiana con media nulla e varianza unitaria nel limite per $N \rightarrow \infty$.

Quanto detto si estende in modo naturale ai campi stocastici. Sotto le ipotesi del Teorema del limite centrale, la somma di campi indipendenti con distribuzioni arbitrarie tende a un campo stocastico gaussiano (per una dimostrazione dettagliata si veda per esempio [9]). In particolare consideriamo un campo definito dalla seguente espressione:

$$Y(x, t) = \int_0^t Z(x, t') dt'. \quad (1.4)$$

- Supponiamo che $Z(x, t)$ sia un campo stocastico δ -correlato nel tempo. Il risultato dell'integrale definito che compare nell'equazione (1.4) per qualsiasi tempo di integrazione t corrisponde alla somma di una serie³ i cui addendi sono variabili casuali indipendenti. Per il teorema del limite centrale $Y(x, t)$ è dunque un campo casuale gaussiano.
- Supponiamo, al contrario, che $Z(x, t)$ sia un campo stocastico con tempo di correlazione finito τ . In tal caso l'integrale in (1.4) si può riscrivere come somma di integrali:

$$Y(x, t) = \int_0^\tau Z(x, t_1) dt_1 + \int_\tau^{2\tau} Z(x, t_2) dt_2 + \cdots + \int_{t-\tau}^t Z(x, t_N) dt_N, \quad (1.5)$$

nella quale gli addendi sono tra loro indipendenti. Si rientra in questo modo nelle ipotesi del Teorema ma, a differenza del caso precedente, il numero di addendi indipendenti nell'equazione (1.5) è finito e aumenta con il tempo di integrazione t . Il teorema del limite centrale assicura dunque che il campo $Y(x, t)$ nel limite per $t \rightarrow \infty$ approssima un campo gaussiano.

1.3 Derivata Funzionale

Nello studio dei campi stocastici si rende necessario l'uso del calcolo differenziale in spazi infinito-dimensional, che possiede numerose applicazioni. In particolare

³Per una definizione dell'integrale di Riemann vedi per esempio [32].

introduciamo la nozione di *derivata funzionale*, strumento che utilizzeremo diffusamente nel seguito. Al fine di rendere più chiara l'esposizione, procediamo attraverso un parallelo fra concetti di analisi in \mathbf{R}^n e la loro estensione in spazi infinito-dimensional, tralasciando le dimostrazioni dettagliate per le quali rimandiamo a [12].

Ricapitoliamo il significato di differenziabilità in \mathbf{R}^n :

Definizione: una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è differenziabile nel punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ se
 $\exists \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ t.c.:

$$\frac{f(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \rightarrow 0 \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (1.6)$$

La precedente definizione coincide con la condizione di esistenza del piano tangente alla superficie $f(\mathbf{x})$ nel punto \mathbf{x}_0 . Si può dimostrare che se la funzione f è differenziabile, allora:

1. Esistono le *derivate direzionali* rispetto a qualsiasi vettore \mathbf{u} , definite come:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}, \quad (1.7)$$

2. Il loro valore si può calcolare a partire dal vettore \mathbf{v} , chiamato *gradiente* di f , nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

3. Le componenti v_i del gradiente sono chiamate *derivate parziali* e sono le derivate direzionali rispetto ai versori \mathbf{u}_i degli assi coordinati:

$$v_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \quad (1.9)$$

L'esistenza del limite (1.7) $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ non è condizione sufficiente per la differenziabilità della funzione f . È infatti necessario che tale limite coincida con il risultato del prodotto scalare in (1.8).

Consideriamo ora uno spazio di Banach⁴ F . In uno spazio di Banach non abbiamo a disposizione un prodotto scalare: per questo motivo introduciamo un secondo spazio E e un funzionale che possa svolgere un compito analogo a quello svolto dal prodotto scalare in spazi euclidei. La dualità, infatti, presuppone l'esistenza di un funzionale bilineare⁵ non-degenere⁶

$$\langle , \rangle : E \times F \rightarrow \mathbf{R}$$

denominato *pairing*. Qualunque spazio E che soddisfi il requisito di dualità rispetto allo spazio F è contenuto nel duale topologico⁷ F^* di F che corrisponde ad una scelta *canonica* di dualità. Sulla base della (1.6) generalizziamo la definizione di differenziabilità. Una funzione $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ è differenziabile nel punto $x_0 \in F$ se $\exists v^* \in F^*$ t.c.:

$$\frac{f(x) - [f(x_0) + \langle v^*, x - x_0 \rangle_0]}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (1.10)$$

Confrontando la (1.6) e la (1.10) emerge una stretta analogia enunciabile come segue:

- il prodotto scalare è sostituito dal pairing naturale $\langle , \rangle_0 : F \times F^* \rightarrow \mathbf{R}$;
- il gradiente (che era un elemento $v \in \mathbf{R}^n$) è sostituito da un elemento $v^* \in F^*$;
- la norma $\|x - x_0\|$ che compare a denominatore della (1.10) è definita in F , per definizione di spazio di Banach;
- la nozione di limite deriva direttamente dalla norma presente nello spazio di partenza F .

⁴Si dice *spazio di Banach* uno spazio dotato di norma completa.

⁵Un funzionale bilineare è un'applicazione $\langle , \rangle : E \times F \rightarrow \mathbf{R}$ che dipende linearmente da entrambi gli argomenti.

⁶Un funzionale si dice non-degenere se $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F \Rightarrow x = 0$ e similmente $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow y = 0$.

⁷Il duale topologico F^* di F è lo spazio di tutte le forme lineari $f^* : F \rightarrow \mathbf{R}$ in cui il pairing è definito come: $\langle f^*, f \rangle_0 := f^*(f)$.

Sia $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ un'applicazione differenziabile nel punto $x_0 \in F$ nel senso della (1.10). Si definisce $\frac{\delta f}{\delta x_0}$, derivata funzionale di f rispetto a x_0 , l'unico elemento in E , se esiste, t.c.

$$\langle v^*, g \rangle_0 = \left\langle \frac{\delta f}{\delta x_0}, g \right\rangle, \quad (1.11)$$

dove v^* è un elemento di F^* definito dalla (1.10). La (1.11) afferma che una funzione differenziabile possiede anche derivata funzionale se l'elemento v^* del duale F^* di F appartiene anche allo spazio $E \subseteq F^*$.

Con questa precisazione intendiamo sottolineare che nella definizione di derivata funzionale è cruciale la scelta dello spazio E : lo spazio più vasto che possiamo scegliere coincide con il duale topologico F^* , nel qual caso la differenziabilità implica l'esistenza della derivata funzionale. Al contrario possiamo scegliere come spazio E un sottoinsieme arbitrariamente piccolo del duale topologico F^* . Al diminuire delle dimensioni dello spazio E la condizione di esistenza (1.11) diventa sempre più restrittiva.

L'esistenza di un funzionale non-degenere (pairing) assicura l'unicità della derivata funzionale (posto che essa esista).

Esemplifichiamo quanto detto nel caso in cui F sia uno spazio di funzioni ϕ definite su un dominio $\Omega \in \mathbf{R}$ e coincida con E (nel seguito l'utilizzo della derivata funzionale sarà limitato esclusivamente a spazi di funzioni). In questo caso il pairing su $F \times F$ è la mappa bilineare data da:

$$\langle , \rangle : F \times F \rightarrow \mathbf{R}, \quad \langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \phi(x) \psi(x) dx,$$

Consideriamo un funzionale $f : F \rightarrow \mathbf{R}$: dall'equazione (1.11) otteniamo che la derivata funzionale di f soddisfa la seguente relazione:

$$\langle Df(\phi), \psi \rangle_0 = \left\langle \frac{\delta f}{\delta \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\delta f}{\delta \phi}(x) \psi(x),$$

dove indichiamo con $Df(\phi)$ l'elemento $v^* \in F^*$ definito dalla (1.11).

In contesto euclideo la differenziabilità garantisce l'esistenza delle derivate direzionali (1.7) e parziali (1.9) e permette di definire operativamente il gradiente attraverso il calcolo del limite in (1.9). Generalizziamo per analogia la definizione operativa di derivata funzionale:

$$\frac{\delta f[\phi]}{\delta \phi(y)}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{f[\phi(x) + \epsilon \delta(x - y)] - f[\phi(x)]\}, \quad (1.12)$$

dove $\delta(x - y)$ svolge in uno spazio infinito-dimensionale lo stesso ruolo dei versori u_i degli assi coordinati euclidei in \mathbf{R}^n . Sotto l'ipotesi di differenziabilità il risultato del limite in (1.12) è un elemento di F^* . Per il calcolo esplicito delle derivate funzionali sfrutteremo la definizione operativa (1.12).

Ecco alcuni esempi:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} f(x) &= \frac{\delta}{\delta f(y)} \int dz \delta(x - z) f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(x) + \epsilon \delta(x - y) - f(x)] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \delta(x - y) = \\ &= \delta(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} \int_{-\infty}^x dz f(z) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\infty}^x dz (f(z) + \epsilon \delta(z - y)) - \int_{-\infty}^x dz f(z) \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \int_{-\infty}^x dz \delta(z - y) = \\ &= H(x - y) \end{aligned}$$

Si ricorda che la funzione di Heaviside è definita dalla:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x dy \delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1/2 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} \int dx g(f(x)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int dx g(f(x) + \epsilon \delta(x - y)) - \int dx g(f(x)) \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int dx [g(f(x)) + \epsilon \delta(x - y) g'(f(x)) + o(\epsilon^2)] - \right. \\ &\quad \left. - \int dx g(f(x)) \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \epsilon \int dx \delta(x - y) g'(f(x)) + o(\epsilon^2) \right\} \\ &= g'(f(y)). \end{aligned}$$

È utile sottolineare il fatto che la derivata funzionale commuta con le derivate ordinarie e parziali. Per maggiori dettagli si veda per esempio [28], [12].

1.4 Teorema di Furutsu-Novikov

Siano X_i , $i = 1, \dots, d$ le componenti di una variabile aleatoria \mathbf{X} gaussiana centrata, e $f(\mathbf{X})$ una funzione differenziabile della stessa. Supponiamo che la correlazione fra le variabili X_i sia:

$$\langle X_\alpha X_\beta \rangle = k_{\alpha\beta}.$$

Un insieme di variabili con le suddette proprietà è descritto dalla seguente funzione densità di probabilità (o PDF):

$$P(X) = \frac{e^{-\frac{1}{2}X\rho(k^{-1})_{\rho\sigma}X_\sigma}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(detk)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.13)$$

Se tutte le medie esistono, si ha:

$$\langle X_\mu f(\mathbf{X}) \rangle = \langle X_\mu X_\nu \rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_\nu} \right\rangle. \quad (1.14)$$

La dimostrazione della relazione precedente risulta banale nel caso unidimensionale ($d = 1$):

$$\langle X f(X) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \partial_x e^{-x^2/2\sigma^2} = \langle X^2 \rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle.$$

Analogamente si dimostra la generalizzazione multidimensionale della (1.14) ($d > 1$) sfruttando la (1.13) e integrando per parti.

L'estensione del risultato (1.14) ad un campo gaussiano moltiplicato per un suo funzionale è oggetto del teorema di Furutsu-Novikov. Esso asserisce che, dato un campo vettoriale gaussiano centrato $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}, t)$ e un suo funzionale $I[\boldsymbol{\eta}]$, risulta:

$$\langle \eta_\mu(\mathbf{r}, t) I[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}', t')] \rangle = \int d^d \mathbf{r}'' \int dt'' \langle \eta_\mu(\mathbf{r}, t) \eta_\nu(\mathbf{r}'', t'') \rangle \left\langle \frac{\delta I[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}', t')]}{\delta \eta_\nu(\mathbf{r}'', t'')} \right\rangle. \quad (1.15)$$

In questa sede omettiamo la dimostrazione dettagliata della (1.15) riportata in [24]. Tale relazione verrà utilizzata diffusamente nel seguito.

1.4.1 Teorema di Furutsu-Novikov e δ -correlazione

In alcuni casi l'ipotesi di δ -correlazione risulta indispensabile per l'applicazione del teorema di Furutsu-Novikov. Riteniamo utile l'esemplificazione dettagliata della suddetta affermazione in quanto diffusamente sfruttata nel seguito dell'esposizione.

Consideriamo un campo gaussiano $\eta(t)$ caratterizzato dalla seguente funzione di correlazione:

$$\langle \eta(t)\eta(s) \rangle = \frac{e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}}}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.16)$$

dove τ è il tempo di correlazione del campo. Siamo interessati al caso in cui $\eta(t)$ sia δ -correlato nel tempo. Tale limite si ottiene per $\tau \rightarrow 0$, infatti si ha:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}}}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}}} = \delta(t-s),$$

dove il secondo membro coincide con la funzione di correlazione nell'ipotesi di δ -correlazione (v. pag. 4). Sia $f[\eta](t)$ un funzionale definito implicitamente dalla seguente integrazione:

$$f[\eta](t) = \int_0^t dt' \eta(t') f(t') \quad (1.17)$$

che segue direttamente da un'equazione evolutiva del tipo:

$$\frac{df}{dt} = f(t)\eta(t). \quad (1.18)$$

Possiamo scrivere implicitamente la derivata funzionale $\delta f / \delta \eta$ mediante la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta f(t)}{\delta \eta(s)} &= \int_0^t dt' \frac{\delta f(t')}{\delta \eta(s)} \eta(t') + \int_0^t dt' f(t') \frac{\delta \eta(t')}{\delta \eta(s)} = \\
&= \int_0^t dt' \frac{\delta f(t')}{\delta \eta(s)} \eta(t') + \int_0^t dt' f(t') \delta(t' - s) = \\
&= \int_0^t dt' \frac{\delta f(t')}{\delta \eta(s)} \eta(t') + H(t - s) f(s),
\end{aligned} \tag{1.19}$$

in cui il primo addendo contiene la derivata funzionale incognita (e quindi la dipendenza implicita), mentre il secondo membro costituisce il contributo esplicito alla derivata funzionale. $H(t - s)$ è la funzione di Heaviside, definita nel § 1.3.

Si pone spesso il problema di studiare le proprietà statistiche del campo stocastico $f(t)$ note le proprietà statistiche di $\eta(t)$. In questo caso tipicamente è necessario calcolare il valor medio di prodotti del tipo $\eta(t)f[\eta](t)$ applicando il teorema di Furutsu-Novikov. A titolo di esempio mostriamo il calcolo della varianza $\langle f^2 \rangle$ sottolineando l'importanza dell'ipotesi di δ -correlazione nell'applicazione dell'equazione (1.15).

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione (1.18) per f , e mediando sulla statistica del campo η , otteniamo⁸:

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle f^2 \rangle}{dt} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \langle \eta(t) \eta(s) \rangle \langle \frac{\delta f^2(t)}{\delta \eta(s)} \rangle = \\
&= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \langle \eta(t) \eta(s) \rangle \langle 2f(t) \frac{\delta f(t)}{\delta \eta(s)} \rangle.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Possiamo sostituire alla derivata funzionale che compare nella (1.20) l'espressione (1.19) precedentemente calcolata, scritta in forma implicita. Tale operazione introduce nuovamente una dipendenza dalla derivata funzionale e perciò richiede un procedimento iterativo. A priori non è evidente che sia sufficiente un numero finito di iterazioni per chiudere il problema. Lo scopo del paragrafo è mostrare come i contributi impliciti alla derivata funzionale (1.19) diano luogo a termini proporzionali a τ^k , con $k \geq 1$ nella (1.20). Per questo motivo il primo addendo in (1.19) può essere trascurato nel limite per $\tau \rightarrow 0$. Tale semplificazione

⁸Facciamo inoltre uso esplicito delle proprietà delle derivazioni e utilizziamo la formula di integrazione gaussiana per parti (1.15).

risolve il problema di chiusura alla prima iterazione e rende particolarmente vantaggioso l'utilizzo dell'integrazione gaussiana per parti come strumento di calcolo nell'ipotesi di δ -correlazione nel tempo.

Sfruttando la (1.16), riscriviamo la (1.20) utilizzando l'espressione implicita della derivata funzionale data dalla (1.19):

$$\frac{d\langle f^2 \rangle}{dt} = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}}}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \langle f(t)H(t-s)f(s) \rangle + \langle f(t) \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta f(t')}{\delta \eta(s)} \eta(t') \rangle \right\}. \quad (1.21)$$

Trattiamo separatamente i due addendi, ricordando che ci interessa il limite per $\tau \rightarrow 0$. Nel primo addendo τ compare solo nella gaussiana e ne rappresenta la deviazione standard. Per $\tau \rightarrow 0$ la gaussiana tende alla δ centrata nel valor medio s :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}}}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \delta(t-s),$$

quindi per tempi di correlazione piccoli, il primo addendo costituisce un contributo non nullo alla varianza.

Nel secondo addendo compare nuovamente la derivata funzionale: utilizziamo iterativamente la (1.19) per svolgere il calcolo. Al primo passo si ha:

$$\begin{aligned} & 4 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}}}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \langle f(t) \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta f(t')}{\delta \eta(s)} \eta(t') \rangle = \\ & = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}}}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \langle f(t) \int_{-\infty}^t dt' \left[H(t'-s)f(s) + \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{\delta f(t'')}{\delta \eta(s)} \eta(t'') \right] \eta(t') \rangle. \end{aligned} \quad (1.22)$$

L'espressione (1.22) è costituita ancora una volta da due addendi (A e B). A è il risultato dell'integrazione doppia:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_D ds dt' e^{-\frac{(t-s)^2}{2\tau^2}} (2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}} \langle f(t)H(t'-s)f(s)\eta(t') \rangle \approx \\ &\approx 4 \int_D ds dt' \frac{1}{2\tau} \langle f(t)f(s)\eta(t') \rangle, \end{aligned} \quad (1.23)$$

nella quale si è approssimata la gaussiana con il valore $\frac{1}{2\tau}$ in un intorno largo τ di t , e con il valore zero al di fuori. Come schematizzato in fig. 1.2 il dominio di integrazione è un triangolo di superficie $Sup(D) \propto \tau^2$, da cui l'integrale doppio si può valutare:

$$A \approx \tau^2 \frac{1}{\tau} \langle f^2(t) \eta(t) \rangle \propto \tau,$$

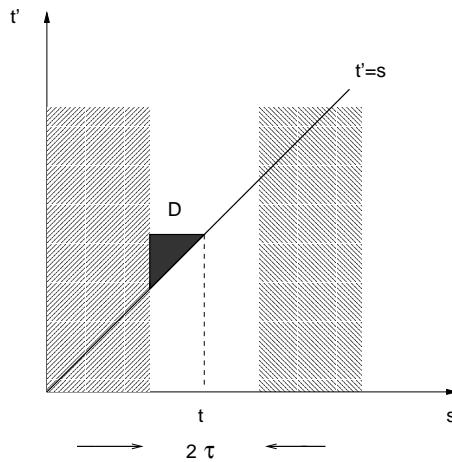


Figura 1.2: Dominio di integrazione D dell'integrale doppio nell'equazione (1.23).

Coerentemente con quanto esposto, all'iterazione successiva si esplicita il secondo addendo B nella somma di un integrale triplo $\propto \tau^2$ e un ulteriore termine implicito, e così via. Nel seguito, ogni volta che saremo interessati a calcolare la derivata funzionale di grandezze definite implicitamente come nella (1.17), sarà assunta l'ipotesi di δ -correlazione e ci limiteremo, quindi, a considerare i contributi esplicativi alla derivata funzionale.

Capitolo 2

Trasporto turbolento

Il presente capitolo è dedicato all'esposizione di alcune nozioni fondamentali di turbolenza omogenea. In particolare, dopo un'introduzione sulla fenomenologia dei flussi turbolenti, esponiamo le teorie di scala di Kolmogorov per il campo di velocità e per lo scalare passivo che sfrutteremo per la modellizzazione del trasporto turbolento nelle nuvole. Inoltre descriviamo il comportamento qualitativo dei flussi turbolenti omogenei bidimensionali in quanto oggetto della successiva analisi numerica. Introduciamo infine il concetto di particella inerziale trasportata dal flusso di velocità e il formalismo lagrangiano che ne descrive l'evoluzione temporale. Tale formalismo sarà applicato nella costruzione di un modello di condensazione delle gocce nelle nuvole. Riteniamo utile che l'introduzione di tali nozioni, diffusamente utilizzate nel seguito, sia presentata nella forma di capitolo preliminare al fine di consentire una scorrevole esposizione del lavoro. Supponiamo noti i fondamenti della meccanica dei fluidi, esposti per esempio in [3] o in [21].

2.1 Fenomenologia dei flussi turbolenti

Benché il moto dei fluidi sia governato dalle equazioni di Navier-Stokes, che ne suggeriscono la natura deterministica, sotto opportune condizioni legate ai parametri tipici del flusso, il campo di moto si rivela altamente impredicibile e complesso. Il parametro adimensionale che si può ritenere controlla la *complessità* del moto è il numero di Reynolds. Esso è definito come $Re := \frac{LV}{\nu}$ dove L e V sono scale tipiche di lunghezza e velocità del flusso e ν è la viscosità cinematica del fluido. Per valori piccoli del numero di Reynolds il flusso è regolare (*laminare*);

al crescere di Re il sistema attraversa stati di *complessità* crescente, fino al raggiungimento di un regime *turbolento* completamente sviluppato. Il meccanismo che permette di inquadrare questo tipo di regime all'interno di un contesto puramente deterministico è tuttora oggetto di indagine scientifica (vedasi per esempio [10]). Nella trattazione consideriamo un flusso in regime turbolento completamente sviluppato, senza occuparci degli stati intermedi attraversati dal sistema e dai meccanismi che regolano la transizione alla turbolenza (per approfondimenti vedasi [23]).

Le equazioni di Navier-Stokes per un flusso incomprimibile di un fluido di viscosità cinematica ν assumono la forma:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \partial p + \nu \partial^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (2.1a)$$

$$\partial \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1b)$$

in cui indichiamo con p la pressione e con ρ_f la densità del fluido. Nel seguito consideriamo che la densità del fluido sia unitaria, e la omettiamo, quindi, nel termine di pressione. Indichiamo con \mathbf{f} la forza per unità di massa che assumiamo periodica ai bordi del dominio spaziale di interesse. L'equazione (2.1a) è la forma differenziale della seconda legge della dinamica mentre la condizione (2.1b) impone il principio di conservazione della massa per un fluido incomprimibile. Esaminiamo il peso relativo dei vari termini che compaiono nell'equazione (2.1a). La risposta dipende in maniera cruciale dalla *scala spaziale* che si intende analizzare. Il concetto di scala spaziale può essere introdotto facendo riferimento alla descrizione del campo di velocità nello spazio di Fourier. Supponiamo di operare mediante la trasformata di Fourier su un campo che dipende dallo spazio e dal tempo. Lo spettro di Fourier che ne risulta è composto da una varietà di modi, ma può accadere che un numero ristretto di essi risulti predominante. In questo caso, indicando con k^* l'ordine di grandezza dei modi predominanti, possiamo affermare che la scala spaziale l che caratterizza il campo considerato corrisponde all'inverso di k^* . Per una definizione quantitativa della scala l si veda per esempio [8]. Un'analisi di questo tipo applicata all'equazione (2.1a) mostra il contributo di ciascun termine dell'equazione di Navier-Stokes nel bilancio energetico del sistema. Il termine viscoso determina la quantità di energia che viene dissipata. La scala caratteristica di questo termine è comunemente indicata con η e chiamata *scala viscosa*. Al contrario il termine di forzante costituisce l'energia introdotta dall'ambiente esterno nel sistema. La scala caratteristica L della

forzante è chiamata *scala integrale*. Il termine non lineare $v_j \partial_j v_i$ redistribuisce l'energia attraverso le diverse scale del flusso senza apportare variazioni all'energia totale. Si può mostrare che tale trasferimento di energia avviene sotto forma di flusso dalle scale maggiori verso le scale minori in tre dimensioni¹. Nessun altro termine entra nel bilancio energetico, perciò l'energia associata ad ogni determinata scala spaziale si ottiene dall'energia immessa a quella scala dal termine di forzante diminuita dell'energia dissipata a quella scala dal termine viscoso e dell'energia trasferita alle scale minori dal termine non lineare.

Per valori elevati del numero di Reynolds l'inezione di energia è limitata alle grandi scale e viene trasferita dal flusso attraverso tutto un intervallo di scale fino a raggiungere le piccole scale alle quali diventa tipicamente predominante la dissipazione: è questo il fenomeno che viene comunemente chiamato *cascata energetica*.

Supporremo inoltre che la soluzione della (2.1a) sia un campo di velocità statisticamente *omogeneo* e *isotropo* (si veda pag. 4). Sotto queste ipotesi possiamo scrivere un'equazione per l'energia cinetica del campo di velocità. Infatti $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ soddisfa la seguente relazione:

$$\begin{aligned}\epsilon(l) &= -\frac{1}{4} \nabla_l \cdot \langle |\delta_l \mathbf{v}|^2 \delta_l \mathbf{v} \rangle = \\ &= -\partial_t \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle + \left\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) + \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{l})}{2} \right\rangle + \\ &\quad + \nu \nabla_l^2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle,\end{aligned}\quad (2.2)$$

dove con ∇_l si intendono le derivate parziali rispetto all'incremento vettoriale \mathbf{l} . La dimostrazione della (2.2) si ottiene dall'equazione (2.1a) sfruttando le ipotesi di incompressibilità ($\partial \cdot \mathbf{v} = 0$) e di omogeneità nelle seguenti forme:

$$\begin{aligned}\langle |\delta_l \mathbf{v}|^2 \delta_l \mathbf{v} \rangle &= \langle |\delta_l \mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 \delta_l \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle; \\ \nabla_{\mathbf{r}} &= -\nabla_{\mathbf{r}'} = -\nabla_{\mathbf{l}}; \\ \langle \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) \rangle &= G(\mathbf{l}).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Per descrivere il bilancio di energia del campo di velocità riteniamo utile sottolineare l'importanza del limite della (2.2) per valori di \mathbf{l} tendenti a zero. Suppo-

¹In due dimensioni avviene un fenomeno differente chiamato *cascata inversa* e descritto al § 2.3.

nendo di fissare un valore per la viscosità $\nu > 0$, dalla (2.2) nel limite suddetto si ha:

$$\partial_t \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle + \nu \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (2.4)$$

A secondo membro nella (2.4) compare un bilancio fra il termine di forzante e il termine viscoso. Nel seguito assumiamo che il sistema turbolento si trovi in uno stato stazionario² del campo di velocità ($\partial_t \langle \mathbf{v} \rangle = 0$). L'energia cinetica per unità di massa risulta quindi finita ed in media costante. I due termini a secondo membro nell'equazione (2.4) si bilanciano perfettamente e l'energia immessa alla scala integrale dalla forzante è dissipata dal termine viscoso alla scala dissipativa. È da notare che, per un valore fissato della viscosità ν , nel limite per $I \rightarrow 0$, il termine nella prima riga della (2.2) si annulla. Nel limite per $\nu \rightarrow 0$, al contrario, il limite di $\epsilon(I)$ per $I \rightarrow 0$ non si annulla affatto ma, come vedremo nel prossimo paragrafo, si comporta coerentemente con un limite finito. Tale termine non contribuisce al bilancio energetico totale con immissione o detrazione di energia, ma solo con una redistribuzione di energia tra le varie scale e corrisponde alla cascata di energia di cui è responsabile il termine non lineare nell'equazione (2.1a).

2.2 Analisi dimensionale e K41

Allo stato attuale non esiste una teoria deduttiva completa che, a partire dalle equazioni di Navier-Stokes, fornisca una previsione esatta della dinamica dei flussi turbolenti. L'approccio fenomenologico di Kolmogorov rinuncia a questo obiettivo e si propone di interpretare le leggi sperimentali alla luce di ipotesi fenomenologiche compatibili con le osservazioni.

Le due leggi empiriche che Kolmogorov si propone di spiegare sono le seguenti:

Prima legge empirica (legge dei due terzi). In flussi caratterizzati da numeri di Reynolds molto elevati l'incremento quadratico medio di velocità $\langle (\delta_l v)^2 \rangle$ tra due punti distanti l è proporzionale a $l^{2/3}$.

Seconda legge empirica. Nel limite per $\nu \rightarrow 0$, mantenendo costanti tutti i parametri di controllo, il tasso di dissipazione di energia cinetica media per unità di massa tende a un valore finito, indipendente dalla viscosità ν .

²Il regime stazionario presuppone l'azione di una forzante \mathbf{f} non nulla. Nel caso in cui tale requisito non sia verificato si parla di turbolenza *in decadimento*.

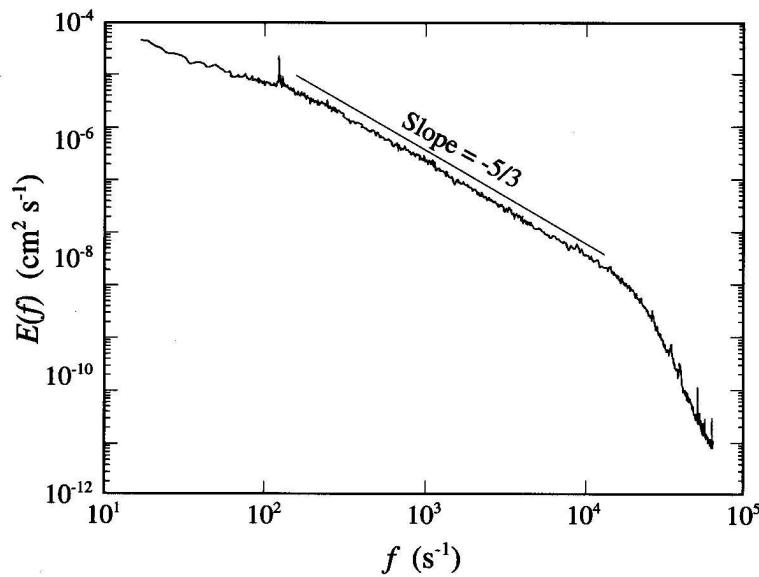


Figura 2.1: Grafico in scala logaritmica dello spettro di energia del flusso fra due cilindri rotanti con $Re = 1200$ [10].

In fig. 2.1 è riportato lo spettro dell'energia cinetica di un campo di velocità. Il grafico è in scala logaritmica. Su un ampio intervallo di numeri d'onda (circa tre ordini di grandezza) si può osservare un andamento con legge di potenza k^{-n} con n prossimo al valore $\frac{5}{3}$. Tale intervallo di numeri d'onda è chiamato *range inerziale* (RI). Le osservazioni sperimentali qui riportate, di cui sono disponibili in letteratura numerosi esempi, sono coerenti con la prima delle due leggi empiriche elencate precedentemente.

Potremmo ripetere argomenti analoghi per quanto riguarda l'anomalia dissipativa, giustificando le due affermazioni precedenti su base empirica.

Procediamo nella presentazione della teoria fenomenologica di Kolmogorov del 1941 (chiamata brevemente K41) enunciandone le due ipotesi fondamentali:

Prima ipotesi di universalità : per valori di Re elevati ma finiti, le proprietà statistiche del campo di velocità alle piccole scale³ sono completamente determinate dalla conoscenza della scala integrale L , del tasso di dissipazione di energia cinetica specifica media ϵ e della viscosità ν .

³Con *piccole scale* intendiamo l'intervallo di scale l t.c. $\eta < l < L$. Come illustrato al § 2.2.1 tale intervallo corrisponde a quello che abbiamo chiamato *range inerziale*

Seconda ipotesi di universalità : nel limite per $Re \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$) le proprietà statistiche del flusso a piccole scale sono universalmente determinate dai valori di L e di ϵ .

2.2.1 Range inerziale

I principali risultati della teoria K41 sono applicabili nell'intervallo di scale che prende il nome di *range inerziale*. Esso è stato descritto precedentemente con riferimento alle osservazioni sperimentali riportate in fig. 2.1, ma possiamo giustificare la sua esistenza solo considerando un flusso in regime turbolento completamente sviluppato. Tale modello comporta, infatti, le seguenti ipotesi addizionali:

- Assumiamo che la forzante agisca solo alle grandi scale, cioè che nello sviluppo di Fourier di tale termine i modi caratterizzati da valori di $k > L^{-1}$ contribuiscano trascurabilmente, in cui L corrisponde a quella che abbiamo chiamato *scala integrale*.
- Supponiamo di osservare il comportamento del fluido a tempi lunghi, ai quali la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes con forzante non nulla tende a uno stato statisticamente stazionario con energia media per unità di massa finita.
- Consideriamo il limite per $Re \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$), nel quale il tasso di dissipazione di energia cinetica media per unità di massa tende a un valore finito:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \epsilon(\nu) = \epsilon \equiv -\frac{d\langle v^2 \rangle}{dt} > 0.$$

Come già osservato in precedenza la stazionarietà implica il bilancio fra iniezione e dissipazione di energia. L'esistenza della scala integrale alla quale è confinato l'effetto della forzante, permette di considerare il comportamento del flusso a scale non influenzate da tale effetto. Nel 1941 Kolmogorov assunse l'esistenza di un intervallo di scale:

- sufficientemente piccole perché si possa approssimare nella (2.2) $\epsilon_r = \epsilon_0$;
- molto minori della scala integrale L ;

- molto maggiori della scala viscosa η .

Nell'ambito della K41 mediante argomenti dimensionali si dimostra che il RI si estende fino alla scala di Kolmogorov:

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}. \quad (2.5)$$

Tale espressione si ottiene imponendo nell'equazione (2.4) che, alla scala η , l'immissione di energia sia trascurabile e la dissipazione viscosa bilanci perfettamente il flusso di energia che proviene dalle grandi scale per effetto della cascata energetica:

$$\epsilon \sim \nu \frac{\langle \delta_\eta v \rangle^2}{\eta^2} \sim \nu \frac{(\eta \epsilon)^{2/3}}{\eta^2},$$

in cui abbiamo sfruttato l'espressione $\langle \delta_\eta v \rangle = \eta^{1/3} \epsilon^{1/3}$ data dalla legge dei due terzi (si veda § 2.2.2). Tale intervallo di scale spaziali (e corrispondentemente di numeri d'onda) è per definizione il *range inerziale*. Il nome è stato tradizionalmente introdotto per indicare che, a questi numeri d'onda, la dinamica non è influenzata dal meccanismo di dissipazione viscosa, né dai dettagli che caratterizzano la modalità di iniezione di energia, ma è dominata dai termini di inerzia. Per definizione nel RI (e sotto le ipotesi precise all'inizio del paragrafo) possiamo trascurare l'intero secondo membro in (2.2), da cui sussiste la seguente relazione:

$$-\frac{1}{4} \nabla_1 \cdot \langle |\delta_l \mathbf{v}|^2 \delta_l \mathbf{v} \rangle = \epsilon. \quad (2.6)$$

La (2.6) indica che il RI è precisamente quell'intervallo di scale alle quali avviene il fenomeno descritto al § 2.1 e che abbiamo chiamato *cascata* di energia.

2.2.2 Intermittenza

Nel RI la K41 suppone valide le ipotesi di universalità, dalle quali possiamo dedurre informazioni sulle funzioni di struttura del campo di velocità definite come (si veda pag. 4):

$$S_p(l) := \langle (\delta_l v)^p \rangle.$$

Consideriamo per esempio la funzione di struttura di ordine $p = 2$, $\langle (\delta_l v)^2 \rangle$: essa è caratterizzata dalle dimensioni $[L]^2[T]^{-2}$, mentre ϵ ha dimensioni $[L]^2[T]^{-3}$. Dalla seconda ipotesi di Kolmogorov segue direttamente la legge dei due terzi:

$$\langle (\delta_l v)^2 \rangle = C \epsilon^{2/3} l^{2/3}, \quad (2.7)$$

dove C è una costante universale⁴. Assumendo omogeneità e isotropia della struttura della turbolenza esaminiamo le conseguenze della teoria sulla generica funzione di struttura di ordine p del campo di velocità. Dalla (2.7), se assumiamo omogeneità dimensionale⁵ e utilizziamo le ipotesi di universalità, possiamo facilmente inferire la forma generale della funzione di struttura di ordine p :

$$S_p(l) = C_p \epsilon^{p/3} l^{p/3} \propto r^{\xi_p}. \quad (2.8)$$

Nel caso $p = 3$ la relazione di natura dimensionale (2.8) si può dimostrare formalmente e risulta quindi esatta:

$$\langle (\delta_l v_{\parallel})^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon l, \quad (2.9)$$

dove $\delta_l v_{\parallel}$ è l'*incremento longitudinale* di velocità definito come:

$$\delta_l v_{\parallel} \equiv [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot \frac{1}{l}$$

La (2.8) prevede che la conoscenza della funzione di struttura di ordine $p = 2$ sia sufficiente per la caratterizzazione di tutte le altre funzioni di struttura. Tale ipotesi di autosimilarità permette di utilizzare argomenti dimensionali che conducono alla previsione

$$\xi_p = \frac{p}{3}$$

per gli esponenti di scala che compaiono nell'equazione (2.8). Si noti tuttavia che i flussi reali non sono autosimili: al variare di p l'esponente $\xi(p)$ non è una funzione lineare di p con coefficiente $\frac{1}{3}$, ma una funzione concava qualitativamente analoga a quella che possiamo osservare in fig. 2.2.

⁴Già nel 1944 tuttavia Landau avanzava un'obiezione concernente l'universalità di C .

⁵Tale ipotesi assunta dalla K41 prende il nome di ipotesi di *autosimilarità* del campo di velocità.

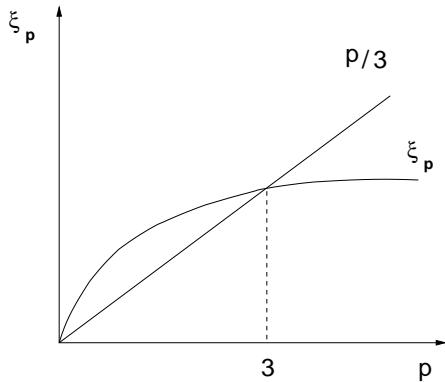


Figura 2.2: Esponente di scala previsto dalla K41, schematizzazione dell'andamento sperimentale dell'esponente di scala in un flusso reale.

Per valori di p superiori a 3 la differenza fra il valore previsto da Kolmogorov e il valore reale di ξ_p cresce con l'ordine p , come è mostrato in fig. 2.2. Chiamiamo questa proprietà *anomalia di scala*. La conseguenza più importante di tale anomalia è l'*intermittenza a piccola scala*. Con tale nome si indica la peculiarità dei flussi turbolenti alle diverse scale. A partire infatti dalla densità di probabilità $p(\delta_r v)$ di una data fluttuazione di velocità a una data scala r , non è possibile ottenere la densità di probabilità della stessa fluttuazione a un'altra scala semplicemente moltiplicando per un fattore opportuno. In altre parole le osservazioni sperimentali mostrano che la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $\delta_l v / (\epsilon l)^{1/3}$ dipende dalla scala l , indicando così che il campo di velocità non è autosimilare come ipotizzato dalla K41. Le fluttuazioni di velocità sono sempre più intense al diminuire della scala (si veda [10]).

Le quantità statistiche che possono testimoniare l'intermittenza a piccola scala sono quelle basate sulle differenze fra i valori assunti dal campo in due punti distinti. La distanza l che separa i due punti determina la scala spaziale alla quale si stanno osservando le differenze di velocità $\delta_l v$. Al contrario la statistica della somma di tali valori assunti dal campo in punti distinti è determinata prevalentemente dai contributi più intensi provenienti dalle grandi scale.

In particolare la statistica sperimentale a un solo punto per le fluttuazioni del campo di velocità mostra un buon accordo della PDF con un andamento gaussiano che indica l'assenza di *intermittenza a grande scala*. La statistica gaussiana, infatti, fornisce un termine di paragone per la valutazione dell'intermittenza di un generico campo turbolento perché risulta completamente determinata

dalla conoscenza del valor medio e della varianza della PDF.

Misure di temperatura in esperimenti di convezione di Rayleigh-Bénard hanno invece mostrato che la PDF a un solo punto della temperatura presenta code esponenziali (e quindi più alte di quelle gaussiane). Tale fenomeno, chiamato intermittenza a grande scala, è caratteristico delle sostanze trasportate dai flussi turbolenti.

2.2.3 Spettro di energia

Si definisce *densità spettrale* la trasformata di Fourier dell'energia cinetica specifica:

$$T(\mathbf{k}, t) = \frac{|\hat{\mathbf{v}}|^2(\mathbf{k}, t)}{2}.$$

Lo *spettro di energia* è definito a partire dalla densità spettrale come:

$$E(k, t) = \int d\Omega_k T(\mathbf{k}, t)$$

Dalla legge dei due terzi otteniamo agevolmente una previsione per lo spettro di energia valida nel RI. Applichiamo infatti l'equazione (2.8) alla funzione di struttura di ordine $p = 2$:

$$\langle (\delta_l v)^2 \rangle \sim l^{2/3} \epsilon^{2/3}. \quad (2.10)$$

Il primo membro corrisponde, a meno di un fattore $\frac{1}{2}$, all'energia cinetica che caratterizza la scala l . Si può dimostrare (si veda [10]) che se la funzione di struttura di ordine 2 soddisfa la (2.10), lo spettro di energia soddisfa la relazione:

$$E(k) \sim k^{-5/3}, \quad (2.11)$$

che risulta in ottimo accordo con le osservazioni sperimentalali (si veda fig. 2.1).

2.3 Turbolenza bidimensionale

Questo paragrafo è dedicato a una descrizione qualitativa delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes per un flusso incomprimibile ad alti numeri di Reynolds

nel caso in cui la struttura del flusso dipenda solo da due coordinate cartesiane x e y . La terza componente del campo di velocità soddisfa, in queste ipotesi, un'equazione di avvezione-diffusione senza termine di accoppiamento con il flusso nel piano (x, y) . Senza perdita di generalità possiamo quindi assumere che la velocità \mathbf{v} possieda solo due componenti u e v e possa essere descritta mediante il formalismo della funzione di corrente ψ . Le equazioni di Navier-Stokes (2.1a) possono essere ridotte allora ad un'unica equazione scalare per il modulo della vorticità $\omega := \partial \times \mathbf{v} = \omega \hat{z}$:

$$\begin{aligned}\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \partial \omega &= \nu \partial^2 \omega + f_\omega \\ \omega &= \partial^2 \psi\end{aligned}\tag{2.12}$$

essendo la velocità \mathbf{v} espressa come $\mathbf{v} \equiv (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$.

Ciò che distingue la turbolenza bidimensionale da quella tridimensionale è la conservazione della vorticità lungo le traiettorie fluide nel limite in cui la viscosità e la forzante siano trascurabili. Di conseguenza l'enstrofia $\frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle$ non può aumentare sotto l'effetto del solo termine non lineare. Kraichnan ipotizzò nel 1967 (si veda [19]) che l'iniezione di energia a una certa scala l_o a un tasso costante ϵ provocasse un flusso di energia da quella scala verso le grandi scale. Tale fenomeno, che prese il nome di *cascata inversa*, è stato ampiamente verificato con simulazioni numeriche ed esperimenti. Lo spettro di energia segue anche in due dimensioni una legge del tipo $k^{-\frac{5}{3}}$. Quando la cascata inversa raggiunge le grandi scale⁶ si formano vortici di dimensioni comparabili a quelle dell'intero sistema. Perché sia soddisfatto il principio di conservazione dell'energia dobbiamo ipotizzare che il sistema dissipi energia a queste scale introducendo un ulteriore termine f_L nell'equazione (2.12) (per esempio possiamo introdurre il termine di attrito costante di *Ekman*: $f_L = -\alpha \omega$). La forma dello spettro alle piccole scale dipende dal tipo di meccanismo dissipativo che ipotizziamo essere presente alle grandi scale.

In due dimensioni è l'enstrofia a compiere cascata diretta (si veda [31]). La previsione teorica per lo spettro di enstrofia è una legge del tipo k^{-3} , ma tale andamento non è stato verificato in modo conclusivo attraverso esperimenti o simulazioni. Le questioni ancora aperte riguardo alla turbolenza bidimensionale sono infatti numerose. Per una descrizione dello stato dell'arte si veda [31].

⁶Cioè le dimensioni spaziali dell'intero sistema, se assumiamo condizioni a contorno periodiche.

Le nozioni introdotte nel presente paragrafo saranno sfruttate nel capitolo 5 in cui verranno presentate simulazioni numeriche ottenute integrando l'equazione (2.12) per la vorticità del campo di velocità bidimensionale \mathbf{v} .

2.4 Scalare Passivo

Un campo di velocità turbolento è in grado di trasportare e mescolare sostanze scalari disperse nel fluido. Esempi di trasporto di scalare sono la dispersione di un colorante in un liquido o del fumo nell'aria. La nozione di scalare passivo introdotta nel presente paragrafo sarà utilizzata nel capitolo 4 per modellizzare il trasporto delle gocce e delle molecole di vapor d'acqua nel processo di condensazione all'interno delle nuvole.

Uno scalare è detto *passivo* se i suoi effetti dinamici sul campo di velocità che lo trasporta sono trascurabili. L'evoluzione di un campo scalare θ trasportato da un flusso incompressibile ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) è descritta dall'equazione di *avvezione – diffusione*:

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = D \nabla^2 \theta + f, \quad (2.13)$$

dove D rappresenta la diffusività molecolare dello scalare e f è la forzante. A questa equazione è unita la condizione iniziale $\theta(\mathbf{r}, 0) = \theta_0(\mathbf{r})$. Il vantaggio del modello passivo risiede nel fatto che la (2.13) risulta disaccoppiata dalle equazioni di Navier-Stokes.

In assenza di sorgenti ($f = 0$) la quantità $\langle \frac{\theta^2}{2} \rangle$, che viene comunemente chiamata densità di *energia scalare*, è dissipata al tasso ϵ_θ :

$$\epsilon_\theta = D \langle |\nabla \theta|^2 \rangle.$$

La presenza di una forzante f introduce energia alle grandi scale e permette quindi il raggiungimento di uno stato stazionario. Durante l'evoluzione il termine di avvezione $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ è responsabile della cascata energetica dalla scala integrale alla scala dissipativa e della presenza, a queste scale, di fluttuazioni dello scalare. Tale processo si conclude alla scala r_d alla quale il termine dissipativo risulta paragonabile con il termine avvettivo. Alle scale $r < r_d$ le fluttuazioni sono attenuate dalla diffusione molecolare e il campo scalare risulta spazialmente regolare.

Se la diffusività D tende a zero, potremmo immaginare che la dissipazione di energia dovuta alla diffusione molecolare si riduca e diventi trascurabile. Al-

contrario in questo limite la scala diffusiva diminuisce molto e il termine avvettivo produce quindi fluttuazioni a scale sempre più piccole: il tasso di dissipazione ϵ_θ risulta finito. Questo comportamento prende il nome di *anomalia dissipativa*, per sottolineare il fatto che il limite $D \rightarrow 0$ non corrisponde affatto a un regime in assenza di dissipazione ($D = 0$).

Le proprietà dei campi scalari sopra descritte sono analoghe a quelle dei flussi turbolenti tridimensionali (si veda § 2.2), ma lo studio dello scalare passivo è molto più semplice a causa della linearità della (2.13). Per questo motivo tale problema è stato oggetto di numerosi studi negli ultimi anni. In particolare sono state spiegate esaurientemente due proprietà fondamentali dello scalare passivo, che ritroviamo anche nella turbolenza tridimensionale di Navier-Stokes (si veda § 2.2.2): le leggi di scala anomale e l'intermittenza a piccola scala. Per una rassegna dei risultati ottenuti e dei problemi aperti si veda per esempio [30].

2.5 Particelle inerziali

Nella maggior parte delle situazioni reali le diverse impurità (inquinanti, gocce, bolle) hanno dimensione finita e densità apprezzabilmente diversa da quella del fluido in cui sono immerse. Una descrizione del loro moto deve tener conto in tal caso degli effetti di *inerzia*: tali impurità sono perciò comunemente chiamate *particelle inerziali*. Le gocce di pioggia, di interesse per la presente trattazione, sono particelle di densità relativa $\rho_d/\rho_f \gg 1$ (in cui ρ_d e ρ_f sono rispettivamente le densità della goccia e dell'aria) e rientrano quindi nella situazione sopra descritta. Riteniamo di qualche utilità accennare alla dinamica delle particelle inerziali nonostante il modello descritto nel § 4 trascuri gli effetti inerziali (che potranno essere inclusi in una successiva generalizzazione).

Lo studio della dinamica di particelle inerziali è tradizionalmente affrontato utilizzando due diversi approcci. Il primo, basato su una descrizione euleriana, consiste nel modellizzare il problema come un flusso a due fasi, nel quale il movimento del fluido e quello delle particelle inerziali (fase *dispersa*) sono descritti da un insieme di equazioni alle derivate parziali. Tali equazioni costituiscono un sistema chiuso solo attraverso l'introduzione di un'equazione di stato. L'approccio euleriano richiede implicitamente l'assunzione di opportune ipotesi sulla dinamica delle particelle. Il secondo approccio è basato su una descrizione lagrangiana statistica in cui le diverse particelle inerziali sono considerate individualmente e le loro traiettorie sono descritte da un insieme di equazioni differenziali ordinarie.

Questi due approcci sono utilizzati anche per lo studio di traccianti passivi

puntuali o *scalari passivi*, si veda § 2.4. I recenti progressi nella comprensione dei meccanismi di intermittenza e delle leggi di scala anomale per lo scalare passivo hanno mostrato l'efficacia del formalismo statistico lagrangiano nello studio dei problemi di trasporto (si veda, per esempio [7]).

Procediamo, quindi, nella modellizzazione lagrangiana di particelle inerziali delle quali trascuriamo l'influenza sulla dinamica del flusso portante⁷ $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Consideriamo una particella sferica rigida di raggio r e densità ρ_d , immersa in un fluido di densità ρ_f in movimento. Indichiamo con $\mathbf{u}(t)$ la velocità della particella:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt},$$

dove $\mathbf{X}(t)$ rappresenta la traiettoria del centro della sfera. Assumiamo inoltre che siano soddisfatte le seguenti condizioni, tipicamente verificate per le gocce in atmosfera:

- Variazioni trascurabili del campo \mathbf{v} sulla superficie della sfera. In particolare questa ipotesi prevede la descrizione di particelle con $r < \eta$, dove η è la scala di Kolmogorov. Tale limite è di interesse per lo sviluppo di un modello di condensazione nelle nuvole in quanto in questa fase le gocce hanno dimensioni tipicamente della decina di μm , mentre la scala viscosa è tipicamente dell'ordine del mm.
- Effetti di curvatura trascurabili (ipotesi valida per gocce sufficientemente grandi, con raggio $r > 1\mu\text{m}$).
- Interazioni trascurabili con il bordo e con altre eventuali particelle. Nuovamente questa ipotesi è verificata nella fase di condensazione in cui le dimensioni delle gocce sono ancora troppo ridotte per rendere apprezzabile la frequenza degli urti.

Sotto queste ipotesi la seconda legge di Newton per una generica particella inerziale trasportata da un flusso \mathbf{v} assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \rho_d V_d \frac{d\mathbf{u}}{dt} = & 6\pi\mu r(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\rho_f V_d(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + 6r^2\sqrt{\pi\rho_f\mu} \int_0^t \frac{\dot{\mathbf{v}}(t') - \dot{\mathbf{u}}(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' + \\ & + \rho_d V_d \mathbf{g} + \rho_f V_d(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

⁷Consideriamo cioè particelle inerziali *passive*.

in cui $V_d = \frac{4}{3}\pi r^3$ è il volume della sfera e $\mu = \rho_f \nu$ è la viscosità dinamica del fluido. I termini a secondo membro della (2.14) sono rispettivamente: la forza di Stokes, la resistenza indotta dall'accelerazione relativa della particella rispetto al fluido, la forza di Basset che tiene conto della *storia* del moto della particella e misura la diffusione di vorticità da una particella in accelerazione, l'attrazione gravitazionale e infine lo sforzo di taglio e il termine di *buoyancy*. Introduciamo i seguenti parametri:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{3\rho_f}{\rho_f + 2\rho_d} \\ \tau_d &= \frac{r^2}{3\nu\beta}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Il contributo della forza di Basset è generalmente trascurato nella descrizione delle gocce in condizioni atmosferiche tipiche⁸. L'equazione (2.14) in forma adimensionale mostra, infatti, che la forza di Basset risulta moltiplicata per il fattore $(\rho_f/\rho_d)^{1/2} \approx 0.03$ per le goccioline in atmosfera. Trascurando quindi la forza di Basset l'equazione (2.14) può essere riscritta per l'incognita $\mathbf{V}(t) := \mathbf{u}(t) - \beta\mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t)$:

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{V}(t) - (1 - \beta)\mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t)}{\tau_d} + (1 - \beta)\mathbf{g},\tag{2.16}$$

che va accoppiata all'equazione delle traiettorie delle particelle:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t) = \beta\mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{V}(t).\tag{2.17}$$

Riteniamo utile sottolineare tre limiti delle (2.16), (2.17):

- Particelle *neutre*: $\rho_d \rightarrow \rho_f \Rightarrow \beta \rightarrow 1$.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{V}(t)}{\tau_d} \Rightarrow \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 e^{-\frac{t}{\tau_d}} \\ \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \sim \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{cases}\tag{2.18}$$

⁸In flussi con elevate accelerazioni lagrangiane tale contributo può rivelarsi importante, come osservato in [29].

Nell'ipotesi in cui la densità delle particelle tenda a quella del fluido possiamo trascurare la \mathbf{V} nella seconda delle (2.18) che, come si può vedere dalla prima relazione, decade esponenzialmente. In questo modo l'evoluzione della traiettoria risulta completamente determinata dalla conoscenza del flusso esterno \mathbf{v} . Le traiettorie delle particelle neutre sono chiamate traiettorie lagrangiane e il loro studio si riduce a quello dello scalare passivo (si veda § 2.6).

- Particelle pesanti: $\rho_d > \rho_f \Rightarrow \beta < 1, \tau_d < 1$.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} \sim \frac{-\mathbf{V}(t) + (1 - \beta)\mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t)}{\tau_d} + (1 - \beta)\mathbf{g} \\ \Rightarrow \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 e^{-\frac{t}{\tau_d}} + (1 - \beta) \int_0^t e^{\frac{t-t'}{\tau_d}} \left(\frac{\mathbf{v}(\mathbf{X}(t'), t')}{\tau_d} + \mathbf{g} \right) dt' \\ \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \beta\mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{V}(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

In questo limite le traiettorie, determinate prevalentemente dalla velocità \mathbf{V} , tendono a seguire quelle del flusso esterno \mathbf{v} , deviandone sia per effetto della gravità e sia per il tempo di ritardo τ_d causato dall'inerzia non trascurabile della particella. Si può dimostrare che tale meccanismo produce un effetto di concentrazione preferenziale nelle zone con minore vorticità (si veda [35]). Si noti che per le goccioline in fase di condensazione nelle nuvole, cioè con un valore del raggio che varia nell'intervallo da 1 a 20 μm , il tempo caratteristico raggiunge un valore massimo di $\tau_d \sim 10^{-2}$ s con $\beta \sim 10^{-3}$. Nella soluzione (2.19) per $\mathbf{V}(t)$ il valore minimo del termine $\frac{v}{\tau_d}$, per un valore di v di circa 1 m s^{-1} , è dell'ordine di $100 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ e predomina quindi sull'accelerazione di gravità $g \sim 10 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$.

- Particelle molto pesanti: la dinamica è dominata in tal caso dagli effetti dovuti all'attrazione gravitazionale: $\rho_d \rightarrow \infty \Rightarrow \beta \rightarrow 0, \tau_p \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} &\sim \mathbf{V}(t) \\ \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} &\sim \mathbf{g} \end{aligned}$$

2.6 Formalismo lagrangiano

Per descrivere la statistica di un generico campo trasportato da un flusso $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, è opportuno adottare un formalismo che descriva le *traiettorie lagrangiane* determinate dal flusso, cioè le traiettorie effettuate dalle particelle fluide. Consideriamo, per esempio, l'evoluzione di una sostanza scalare passiva $\theta(\mathbf{r}, t)$ in assenza di forzante. Nel caso in cui il coefficiente D sia nullo, l'equazione di avvezione-diffusione (2.13) è del prim'ordine e lineare. Il campo di velocità definisce un insieme di curve caratteristiche (traiettorie lagrangiane) mediante la seguente relazione (si veda § 2.5, equazioni (2.18)):

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}(s), s), \quad \boldsymbol{\rho}(0) = \boldsymbol{\rho}_0. \quad (2.20)$$

Se il campo di velocità è sufficientemente regolare (Lipschitz), le soluzioni della (2.20) sono uniche e lo scalare è conservato lungo ogni traiettoria lagrangiana. Il campo euleriano $\theta(\mathbf{r}, t)$ coincide con la condizione iniziale valutata sulla (unica) traiettoria passante per \mathbf{r} all'istante t :

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_0(\boldsymbol{\rho}(s)), \quad \boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}.$$

Se la diffusività D è non nulla, l'equazione di avvezione-diffusione (2.13) è del secondo ordine e non si può risolvere con il metodo sopra indicato. In questo caso è conveniente modificare la (2.20) aggiungendo al campo di velocità un *rumore bianco*, cioè un processo stocastico vettoriale gaussiano t.c.:

$$\langle \boldsymbol{\eta}(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (2.21)$$

Per comprendere la funzione svolta dal rumore bianco nella risoluzione del problema (2.13), introduciamo un campo scalare ausiliario ϕ che, per una fissata realizzazione del rumore bianco, soddisfi un'equazione di trasporto con un campo di velocità dato da $\mathbf{v} + \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}$ e un termine diffusivo nullo:

$$\partial_t \phi + [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}(t)] \cdot \nabla \phi = 0, \quad (2.22)$$

con la stessa condizione iniziale del campo θ : $\phi(\mathbf{r}, 0) = \theta_0(\mathbf{r})$. Si può facilmente mostrare che il campo $\langle \phi \rangle$, media di ϕ sulle realizzazioni del rumore $\boldsymbol{\eta}$, soddisfa la stessa equazione che governa il campo θ :

$$\partial_t \langle \phi \rangle + \mathbf{v} \cdot \nabla \langle \phi \rangle = D \nabla^2 \langle \phi \rangle.$$

La dimostrazione segue direttamente dalla (2.22) mediando sul rumore gaussiano e utilizzando il teorema di Furutsu-Novikov (per maggiori dettagli si veda [11]). Per una fissata realizzazione di $\boldsymbol{\eta}$ possiamo risolvere la (2.22) con il metodo delle caratteristiche (che sono in questo caso curve stocastiche). Il campo θ coincide con la media *lagrangiana*⁹ di tale soluzione:

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{r}, t) &= \langle \phi(\boldsymbol{\rho}(s), s) \rangle = \langle \theta_0(\boldsymbol{\rho}(s)) \rangle, & \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r} \\ \theta(\mathbf{r}, t) &= \int \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t) \theta_0(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho},\end{aligned}\tag{2.23}$$

dove $\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t)$ è il *propagatore* (o *funzione di Green*), che rappresenta la densità di probabilità che una particella, che si trova nel punto \mathbf{r} all'istante t , si trovasse nel punto $\boldsymbol{\rho}$ all'istante iniziale.

La probabilità di transizione fra due stati di un sistema si può definire grazie al formalismo di Feynman¹⁰ attraverso un'operazione chiamata *integrale di cammino* (*path integral*). Tale operazione può essere sfruttata per il calcolo del propagatore (si veda [7]) la cui conoscenza risulta evidentemente cruciale per ottenere l'evoluzione del campo euleriano θ . La forma esplicita del propagatore è fortemente condizionata dalle caratteristiche del sistema in studio e solo in alcuni casi se ne può ricavare la forma esatta.

Nel caso in cui il campo di velocità sia regolare, e in assenza di diffusione, le traiettorie lagrangiane sono uniche e una sola di esse passa nel punto \mathbf{r} al tempo t . La probabilità di transizione fra la posizione iniziale e la posizione \mathbf{r} all'istante t degenera:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t) \rightarrow \delta(\boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{r}), \quad D \rightarrow 0.$$

Se la diffusione è non nulla, le traiettorie lagrangiane si ottengono per ogni realizzazione del rumore bianco. Per questo motivo il propagatore degenere non è $\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t)$ bensì un propagatore *condizionato* a una determinata realizzazione del rumore:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t | \boldsymbol{\eta}) = \delta(\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\eta}}(t) - \mathbf{r}),$$

⁹La media *lagrangiana* è una media su tutte le possibili traiettorie lagrangiane passanti per \mathbf{r} al tempo t .

¹⁰Per una trattazione approfondita dell'argomento si veda [1]).

da cui mediando sulle possibili realizzazioni di $\boldsymbol{\eta}$ si ha:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t) = \langle \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t | \boldsymbol{\eta}) \rangle = \langle \delta(\boldsymbol{\rho}_\eta(t) - \mathbf{r}) \rangle.$$

Nel caso in cui il campo di velocità sia turbolento l'espressione del propagatore si ottiene solo formulando ipotesi aggiuntive sul campo di velocità stesso. Un modo per riprodurre le proprietà statistiche di un flusso turbolento è schematizzare $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ mediante un campo stocastico. Un esempio di questo tipo di approccio è costituito dal modello di Kraichnan descritto al § 2.6.1. In questo modo il campo stocastico \mathbf{v} costituisce un ulteriore insieme statistico sul quale sono possibili operazioni di media. In questo contesto si ottengono le traiettorie lagrangiane per ogni realizzazione della coppia di campi $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})$, da cui, in analogia con il caso precedente, si ha:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t) = \langle \mathcal{P}(\boldsymbol{\rho}, 0; \mathbf{r}, t | \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \rangle = \langle \delta(\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}}(t) - \mathbf{r}) \rangle. \quad (2.24)$$

2.6.1 Modello di Kraichnan

Il modello di Kraichnan, a cui è dedicato questo paragrafo, fornisce le ipotesi e gli strumenti necessari per la trattazione analitica del modello di condensazione che sarà introdotto nel capitolo 4. I risultati che otterremo in questo ambito forniranno informazioni qualitative del comportamento del sistema in studio, che potranno essere confrontate con i risultati dell'analisi numerica successiva.

Al fine di studiare il trasporto passivo da parte di un flusso turbolento, Kraichnan ha introdotto un modello semplificato in cui il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è schematizzato da un campo casuale gaussiano a media nulla e covarianza:

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t') \rangle = \mathcal{K}_{ij}(\mathbf{r}) \delta(t - t'). \quad (2.25)$$

Il campo \mathbf{v} è per definizione statisticamente *stazionario* nel tempo e spazialmente *omogeneo*. La proprietà fondamentale del modello di Kraichnan è la δ -correlazione che definisce un processo stocastico privo di memoria. Grazie a questo modello possiamo ottenere risultati esatti che devono essere interpretati come comportamento limite dei flussi reali per tempi di correlazione τ molto piccoli (o per tempi di osservazione molto lunghi). Infatti l'integrale temporale di una generica funzione random con tempo di correlazione finito può essere

scritto, per tempi sufficientemente lunghi, come somma di N numeri casuali indipendenti grazie all'operazione descritta al § 1.2. La statistica di tale somma è oggetto del Teorema del limite centrale che suggerisce l'importanza del caso δ -correlato come limite per descrizioni a tempi lunghi (molto maggiori del tempo di correlazione).

Il caso più semplice che possiamo analizzare è il trasporto diffusivo in assenza di avvezione ($\mathbf{v} = 0$) in cui le traiettorie lagrangiane sono definite dalla:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}(t). \quad (2.26)$$

La soluzione della (2.26) è detta *moto browniano*. La densità di probabilità di posizione è definita dalla:

$$p(\mathbf{x}, t) := \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\boldsymbol{\eta}}(t)) \rangle, \quad (2.27)$$

in cui a secondo membro compare la media lagrangiana sulle traiettorie $\mathbf{X}(t)$ associate a una data realizzazione del rumore $\boldsymbol{\eta}(t)$. La (2.27) uguaglia l'espressione puntuale della densità di probabilità di posizione a una quantità mediata sulle traiettorie ed esprime per questo il punto di contatto fra la descrizione lagrangiana delle particelle e quella euleriana¹¹. Derivando la (2.27) rispetto al tempo e sfruttando la (2.26) si ottiene un'equazione differenziale per $p(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t p(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\boldsymbol{\eta}}(t)) \rangle = \\ &= -\sqrt{2D} \nabla \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\boldsymbol{\eta}}(t)) \boldsymbol{\eta}(t) \rangle = \\ &= -\sqrt{2D} \nabla (p(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\eta}(t)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definiamo una densità di probabilità che non dipenda dal rumore bianco al tempo t mediando sulla distribuzione di probabilità gaussiana di $\boldsymbol{\eta}$:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = \langle p(\mathbf{x}, t) \rangle_{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.29)$$

¹¹Si può associare a qualunque equazione stocastica lagrangiana del tipo (2.26) una corrispettiva equazione euleriana per la densità di probabilità, che prende il nome di equazione di Fokker-Planck (si veda per esempio [27], [13]).

Mediando la (2.28) sulla distribuzione di probabilità del rumore si ottiene un'equazione per $\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) &= \langle \partial_t p(\mathbf{x}, t) \rangle_{\eta} = \\ &= -\langle \sqrt{2D} \nabla(p(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\eta}(t)) \rangle_{\eta} = \\ &= D \nabla^2 \mathcal{P}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Per calcolare la media sul rumore bianco abbiamo fatto uso esplicito dell'ipotesi di δ -correlazione e di gaussianità di $\boldsymbol{\eta}$ e abbiamo sfruttato il teorema di Furutsu-Novikov nel caso descritto al § 1.4.1. La soluzione dell'equazione (2.30) con condizione iniziale $\mathcal{P}(\mathbf{R}, 0) = \delta(\mathbf{R})$ è:

$$\mathcal{P}(\mathbf{R}, t) = (4\pi Dt)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{R^2}{4Dt}}. \quad (2.31)$$

La densità di probabilità di posizione (2.31) per il problema puramente diffusivo è una gaussiana con media nulla e varianza σ^2 che cresce linearmente con il tempo:

$$\sigma^2 = 2Dt$$

Analogamente possiamo sviluppare il caso avvettivo e diffusivo. Se il campo di velocità è del tipo (2.25), le definizioni appena introdotte possono essere generalizzate in modo naturale includendo ulteriori operazioni di media sulle realizzazioni del campo di velocità:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{2D} \boldsymbol{\eta}(t) \\ p(\mathbf{x}, t) &:= \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}}(t)) \rangle \\ \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) &:= \langle p(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Procedendo in maniera analoga al caso precedente, si ottiene l'equazione di Fokker-Planck per la densità di probabilità $\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$:

$$\partial_t \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} K_{ij}(0) \partial_k \partial_j \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) - D \nabla^2 \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

La sua soluzione è:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = |H|^{\frac{1}{2}} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{H_{ij}x_i x_j}{4t}},$$

in cui $(H^{-1})_{ij} = K_{ij}(0) + \delta_{ij}$ e d è la dimensione dello spazio.

Capitolo 3

Microfisica delle nuvole

In questo capitolo si presenta il modello classico di microfisica delle nuvole *calde*, in cui la temperatura è compresa fra 0 e 20°C. Tale modello costituisce il punto di partenza per il lavoro sviluppato in questa tesi.

Classicamente si concentra l'attenzione su una porzione di spazio di scala spaziale molto maggiore delle dimensioni delle goccioline ma molto più piccola dell'intera nuvola, che prende il nome di *volume fluido*. All'interno del volume fluido il campo di soprasaturazione è assunto spazialmente uniforme, se ne considera cioè esclusivamente l'evoluzione temporale. Il volume fluido raggiunge tipicamente le dimensioni del litro e in una nuvola sviluppata contiene circa 10^5 goccioline che nel modello classico sperimentano lo stesso valore di soprasaturazione dipendente dal tempo. Il raggio delle goccioline dipende da tale valore di soprasaturazione ed evolve quindi in maniera identica per tutte le goccioline contenute nel volume fluido. Il modello classico prevede un'evoluzione dello spettro di dimensioni delle goccioline che tende a restringersi attorno al suo valor medio, mentre le osservazioni sperimentalì indicano al contrario un ampliamento di tale spettro.

Generalizzazioni successive del modello [22] considerano la possibilità di una continua immissione di nuove particelle solide (CCN) dall'ambiente esterno nella nuvola (*entrainment*) attorno alle quali è favorita la formazione di nuove goccioline. Il fenomeno di entrainment produce un allargamento dello spettro che giustifica solo le osservazioni sulle nuvole marittime, assumendo ipotesi non realistiche sullo spettro di dimensioni dei CCN.

Riteniamo che il fallimento del modello classico sia dovuto alla scarsa significatività del volume fluido come oggetto di indagine in presenza di turbolenza. Infatti due goccioline inizialmente appartenenti allo stesso volume fluido si se-

parano molto rapidamente se trasportate da un campo di velocità turbolento e, nell'intervallo di tempo caratteristico della condensazione, si spostano su distanze dell'ordine della scala spaziale dell'intera nuvola. Una statistica sulle goccioline appartenenti a un singolo volume fluido risulta quindi non significativa mentre appare indispensabile una descrizione globale della nuvola che sarà oggetto del capitolo 4.

La formazione delle gocce di pioggia avviene in tre fasi:

- Nucleazione: dalla fase di vapore, le molecole si aggregano a formare gocce molto piccole, il cui raggio dipende dall'umidità dell'ambiente in cui si formano.
- Condensazione: le goccioline che si sono formate aumentano il loro raggio grazie alla condensazione di ulteriori molecole di vapor acqueo.
- Coalescenza: le gocce iniziano a cadere, ognuna con velocità terminale differente, dipendente dalla sua dimensione. Il meccanismo di aggregazione in questa fase è l'urto tra le gocce.

Benché questo lavoro sia circoscritto alla fase di condensazione, riteniamo utile una descrizione dell'intero processo di formazione delle gocce di pioggia a partire dal campo di vapore acqueo.

3.1 Nucleazione

Nel processo di *nucleazione* avviene la transizione del sistema da uno stato disordinato (vapore acqueo) a uno stato maggiormente ordinato, rappresentato dalla presenza di gocce. In quella che viene chiamata nucleazione *omogenea*, le molecole di vapore urtano casualmente le une contro le altre e danno luogo alla formazione di gocce d'acqua. Si distingue questo caso dalla nucleazione *eterogenea*, nella quale l'aggregazione delle molecole di vapore avviene sulla superficie di una particella solida estranea, chiamata genericamente *nucleo di condensazione* o CCN.

Le gocce si formano solo se il bilancio energetico è favorevole. La formazione di una goccia di raggio R richiede un'energia di attivazione E_{sup} legata alla tensione superficiale e fornisce un'energia E_{vol} proporzionale al volume (data dall'aumento di energia libera di Gibbs che si verifica nel passaggio di fase):

$$\Delta E = E_{\text{sup}} - E_{\text{vol}} = 4\pi R^2 \sigma_{vl} - \frac{4}{3}\pi R^3 n_l (\mu_v - \mu_l), \quad (3.1)$$

dove σ_{vl} è il lavoro richiesto dalla formazione di un'unità di superficie di interfaccia; μ_v è l'energia libera di Gibbs di una molecola di vapore, mentre μ_l è l'energia libera di Gibbs di una molecola d'acqua; n_l è la densità numerica di molecole d'acqua per unità di volume all'interno della goccia. Si può dimostrare che sussiste la seguente relazione:

$$\mu_v - \mu_l = k_B T \log \frac{e}{e_s} \quad (3.2)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, e ed e_s sono rispettivamente la pressione di vapore e la pressione di saturazione e T è la temperatura assoluta. Dalle (3.1) e (3.2) segue che l'andamento di ΔE in funzione del raggio R dipende in modo cruciale dalla pressione di vapore. Infatti l'energia di volume nell'equazione (3.1) risulta:

- negativa se l'ambiente è sottosaturo ($e < e_s$);
- nulla se l'ambiente è saturo ($e = e_s$);
- positiva se l'ambiente è soprasaturo ($e > e_s$).

Come schematizzato in fig. 3.1 solo in quest'ultimo caso la funzione $\Delta E(R)$ presenta un estremo relativo in R_c , detto *raggio critico*.

Il processo di nucleazione è casuale e genera gocce caratterizzate da raggi R distribuiti secondo uno spettro. Per $R < R_c$ la funzione $\Delta E(R)$ è crescente. Per questo motivo il processo di evaporazione, che porta alla diminuzione del raggio delle gocce, è energeticamente favorito: la goccia appena formata evapora fino a scomparire. Sopravvivono solo le gocce che al momento della formazione hanno raggio $R > R_c$, per le quali la funzione $\Delta E(R)$ è decrescente e quindi è favorito energeticamente l'aumento del raggio per condensazione: le goccioline che sopravvivono si dicono *attivate*.

Derivando la (3.1) si ottiene il valore di R_c :

$$\frac{\partial(\Delta E)}{\partial R} = 0 \iff R_c = \frac{2\sigma_{vl}}{n_l k_B \log\left(\frac{e}{e_s}\right)}, \quad (3.3)$$

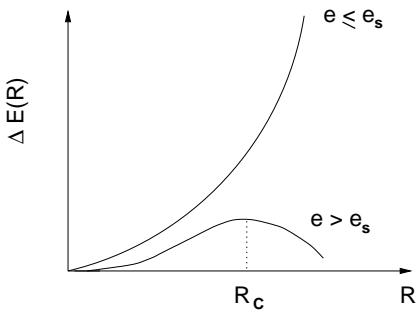


Figura 3.1: Schema dell'andamento dell'energia di una gocciolina in fase di nucleazione in funzione del raggio nei due casi $e \leq e_s$ ed $e > e_s$. Si noti che l'aumento del raggio corrisponde a una diminuzione di energia solo in un ambiente soprasaturo per goccioline che superano il raggio critico R_c .

da cui il raggio critico dipende dalla soprasaturazione (definita percentualmente dalla relazione $s = (\frac{e}{e_s} - 1) \times 100\%$). Come preannunciato nel presente paragrafo, R_c assume un valore positivo solo nel caso in cui l'ambiente sia soprasaturo, cioè $\frac{e}{e_s} > 1$. Se $\frac{e}{e_s} < 1$ (ambiente sottosaturo) la (3.3) predice un valore negativo per R_c , mentre se l'ambiente è saturo ($\frac{e}{e_s} = 1$) si ha $R_c \rightarrow \infty$. In una nuvola sviluppata, la densità di goccioline attivate è di circa DATO!! Affinché tale valore sia conseguente al processo di nucleazione omogenea è necessario che l'ambiente sia caratterizzato da una soprasaturazione di circa 300 – 400%. In atmosfera s supera raramente l'1%, perciò possiamo concludere che la nucleazione omogenea gioca un ruolo trascurabile all'interno delle nuvole.

In natura è presente un meccanismo di aggregazione più efficace di quello descritto, che va sotto il nome di *nucleazione eterogenea*. Esso avviene in presenza di particelle estranee (CCN) che agiscono come catalizzatori. Le molecole di vapore che si depositano sulla superficie dei CCN condensano rapidamente e formano uno strato d'acqua un fase liquida come schematizzato in fig. 3.2.

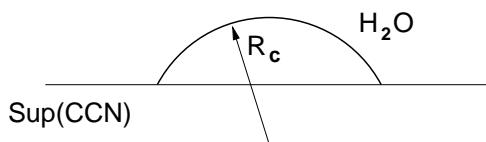


Figura 3.2: Nucleazione eterogenea, le molecole di vapore condensano sulla superficie di una particella solida estranea e formano uno strato d'acqua di forma curva.

Per descrivere questo tipo di nucleazione si possono sfruttare i concetti introdotti per la nucleazione omogenea, con la differenza che il raggio critico assume qui il significato più generale di raggio critico *di curvatura*. L'efficacia della nucleazione eterogenea è ulteriormente accentuata dalla geometria dello strato d'acqua che si forma sulla superficie del CCN: n molecole che condensano attorno a un CCN come in fig. 3.2 danno luogo a un raggio di curvatura maggiore del raggio della sfera formata dalle stesse n molecole. Ciò significa che la goccia embrionale, se eterogenea, ha più probabilità di superare il raggio critico di curvatura e quindi di sopravvivere.

Quando le molecole d'acqua circondano l'intero nucleo di condensazione si ha la formazione della goccia che contiene al suo interno il CCN. Per questo motivo la formazione di gocce sufficientemente grandi è strettamente legata alla dimensione dei nuclei.

In natura sono presenti nuclei di condensazione solubili e non solubili. La solubilità del CCN aumenta ulteriormente l'efficacia del processo. In altre parole l'attivazione delle goccioline è massimamente favorita in presenza di nuclei di condensazione grandi e solubili. Alla fine di questa prima fase lo spettro dei raggi delle gocce è fortemente influenzato dalle caratteristiche dei nuclei di condensazione presenti.

3.2 Evaporazione e condensazione

Consideriamo la popolazione di gocce generata dal processo di nucleazione, con raggio eccedente il raggio critico R_c . La fase successiva vede l'aumento delle dimensioni di queste gocce causato dalla *condensazione*. Il meccanismo opposto, l'*evaporazione*, provoca la diminuzione del raggio delle gocce.

La condensazione avviene in corrispondenza di un flusso di molecole di vapore che investe la goccia, mentre il flusso di molecole dalla goccia verso l'ambiente esterno provoca l'evaporazione.

Classicamente si considera lo stato di condensazione dell'intera goccia come se fosse all'equilibrio termodinamico, sono cioè considerate costanti le quantità termodinamiche microscopiche associate alla gocciolina. Tale approssimazione (approssimazione *quasi – statica*) è pienamente giustificata in condizioni atmosferiche tipiche in quanto il tempo impiegato per raggiungere l'equilibrio termodinamico locale risulta molto minore dei tempi associati alla crescita per condensazione. L'introduzione della turbolenza non pregiudica la validità dell'approssimazione quasi-statica dello stato di condensazione, in quanto i tempi

impiegati dalla gocciolina per raggiungere l'equilibrio termodinamico risultano comunque molto più piccoli della scala temporale minima associata alle fluttuazioni turbolente (per una discussione dettagliata si veda [34]). L'equazione classica di condensazione sarà quindi considerata valida anche nell'ambito del modello turbolento introdotto nel capitolo 4.

La dinamica della diffusione di vapore sulla gocciolina è regolata dall'equazione:

$$\frac{\partial \rho_v(\vec{r}, t)}{\partial t} = \partial^2 \rho_v(\vec{r}, t), \quad (3.4)$$

nella quale il secondo membro della (3.4) è il flusso di molecole di vapore e $\rho_v(\vec{r}, t)$ è il campo densità di vapore acqueo definito come:

$$\rho_v(\vec{r}, t) := \lim_{\delta V_{air} \rightarrow 0} \frac{\delta m_{vapour}}{\delta V_{air}}.$$

Nella risoluzione dell'equazione (3.4) si assumono le seguenti ipotesi semplificative:

- le gocce sono di forma sferica;
- lo stato di diffusione è stazionario;
- il campo di vapore è dotato di simmetria sferica rispetto al centro della goccia.

Sotto queste ipotesi il campo di vapore è del tipo:

$$\rho_v(\vec{r}, t) = \rho_v(r),$$

da cui, riscrivendo la (3.4) in coordinate polari sferiche, si ha:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\rho_v}{dr}) = 0. \quad (3.5)$$

La soluzione dell'equazione (3.5) con condizioni al contorno $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_v(r) = \rho_v(\infty)$ è:

$$\rho_v(r) = \rho_v(\infty) - \frac{R}{r} [\rho_v(\infty) - \rho_v(R)], \quad (3.6)$$

dove R è il raggio della goccia. Si noti che la soluzione (3.6) rispecchia le ipotesi di simmetria assunte.

Esaminiamo ora l'evoluzione del raggio di una goccia nella fase di condensazione dovuta alla diffusione di vapore. Il flusso di molecole di vapore sulla superficie della goccia ne aumenta (o diminuisce) la massa ad un ritmo dato dalla relazione:

$$\dot{m} = 4\pi R^2 D_v \frac{d\rho_v(r)}{dr} \Big|_R = 4\pi R D_v [\rho_v(\infty) - \rho_v(R)], \quad (3.7)$$

dove si è fatto uso esplicito della soluzione (3.6) per il campo di vapore, e si è considerata l'espressione

$$D_v \frac{d\rho_v(r)}{dr} \Big|_R$$

per il flusso di vapore in direzione radiale attraverso una superficie sferica di raggio R .

Nella (3.7) compaiono due funzioni incognite: la massa m della goccia (esprimibile in funzione del raggio R della goccia, nota la densità ρ_d) e il valore della densità in corrispondenza della superficie della goccia. È quindi necessario introdurre altre equazioni per chiudere il problema.

Consideriamo note le condizioni al contorno ($r \rightarrow \infty$) e introduciamo il bilancio energetico: la condensazione di vapore acqueo sulla superficie della goccia, libera un flusso di calore pari a $L\dot{m}$, con L calore latente di evaporazione. Utilizzando la legge di Fourier e assumendo che la conduzione avvenga istantaneamente possiamo uguagliare il flusso di calore emesso al flusso di calore assorbito:

$$L\dot{m} = 4\pi k_a R [T(R) - T(\infty)], \quad (3.8)$$

dove k_a è la conduttività termica dell'aria. L'equazione (3.8) introduce la nuova incognita $T(R)$. Supponiamo che il raggio sia sufficientemente elevato per poter considerare trascurabili gli effetti della curvatura sulla pressione di vapore all'equilibrio. Sotto questa ipotesi possiamo scrivere l'equazione di stato dei gas perfetti applicata al vapor d'acqua in condizioni di saturazione su una superficie piana:

$$e_s = \rho_{vs} R_v T, \quad (3.9)$$

dove R_v è la costante universale dei gas perfetti per unità di massa del vapore, e_s e ρ_{vs} sono la pressione e la densità di saturazione su una superficie piana. Poiché e_s dipende solo dalla temperatura è evidente dalla (3.9) che ρ_{vs} è una funzione nota della temperatura. L'utilità della (3.9) è evidente se si ipotizza che l'incognita $\rho_v(R)$ che compare nella (3.7), da cui siamo partiti, coincida con il suo valore in condizioni di saturazione:

$$\rho_v(R) = \rho_{vs}(T(R)).$$

Tale ipotesi è giustificata in questo contesto perché nelle nuvole la soprasaturazione raggiunge tipicamente valori dell'1%, e si è quindi prossimi allo stato di saturazione. Grazie a questa approssimazione e supponendo che l'intero ambiente sia in condizioni di saturazione (cioè $e(\infty) = e_s[T(\infty)]$), possiamo sfruttare l'equazione di Clausius-Clapeyron¹:

$$\frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dT} \cong \frac{L}{R_v T^2}. \quad (3.10)$$

La combinazione delle (3.10) e (3.9) porta alla relazione:

$$\frac{d\rho_{vs}}{\rho_{vs}} = \frac{L}{R_v T^2} - \frac{dT}{T} \quad (3.11)$$

In condizioni di saturazione le (3.7), (3.8) e (3.11) si riducono all'unica equazione:

$$\dot{m} = \frac{4\pi R s}{F_k + F_d},$$

dove $s = \frac{e(\infty)}{e_s(\infty)} - 1$ è la soprasaturazione in aria libera e inoltre:

$$F_k = \frac{L^2}{k_a R_v T^2(\infty)};$$

$$F_d = \frac{R_v T(\infty)}{D_v e_s(\infty)}.$$

¹Quest'ultima ipotesi è necessaria se si intende studiare il sistema analiticamente. Il suo rifiuto costringe a un'analisi esclusivamente numerica del processo.

L'equazione di evoluzione della massa è sostanzialmente un'equazione di evoluzione del raggio R essendo $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_d$:

$$\dot{R} = \frac{A_3 s(t)}{R}, \quad (3.12)$$

dove $A_3 = \frac{1}{F_k + F_d}$. Discuteremo nel seguito l'equazione (3.12) e la previsione che ne consegue nell'ambito del modello classico, osservando come essa risulti in contraddizione con le osservazioni.

La trattazione precedente si riferisce al caso in cui la goccia può considerarsi costituita da acqua pura. Ciò avviene quando la massa del CCN disiolto nella goccia è trascurabile rispetto alla massa d'acqua. Tale condizione non è verificata per gocce piccole ($\sim 1\mu\text{m}$) per le quali è necessario considerare gli effetti della composizione eterogenea e della curvatura della superficie, che introducono due termini aggiuntivi nelle equazioni scritte. Il risultato di tali correzioni sull'equazione di evoluzione della massa è:

$$\dot{m} = \frac{4\pi R s}{F_k + F_d} \left(s - \frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} \right),$$

Nella relazione precedente $\frac{a}{R}$ rappresenta l'effetto della curvatura sulla tensione di vapore all'equilibrio, con

$$a = \frac{2\sigma_{vl}}{\rho_d R_v T},$$

mentre il termine $\frac{b}{R^3}$ rappresenta la correzione dovuta all'effetto del sale disiolto in acqua sulla tensione di vapore all'equilibrio. Il coefficiente b è una costante nota in funzione di quantità caratteristiche della goccia. Per approfondimenti si vedano per esempio [26], [14].

L'equazione di evoluzione classica per il raggio delle goccioline è accoppiata a un'equazione di evoluzione per la soprasaturazione. Essenzialmente si formula un'equazione differenziale che descrive le proprietà di un volume fluido che sale con velocità data. Il moto verticale modifica l'energia interna del volume fluido e favorisce l'evaporazione fornendo quindi la sorgente di soprasaturazione. Dalle relazioni termodinamiche classiche e introducendo le equazioni che governano il moto di un volume d'aria in atmosfera si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{ds(t)}{dt} = A_1 w - A_2 \frac{d\rho_v}{dt} \quad (3.13)$$

in cui i coefficienti A_1 e A_2 sono determinati da espressioni che coinvolgono le quantità termodinamiche associate alla goccia. In condizioni atmosferiche tipiche, con una temperatura variabile fra 0 e 20 °C, i valori tipici dei coefficienti A_1 e A_3 sono rispettivamente $5 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ e $5 \times 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, e variano molto lentamente cosicché possiamo considerarli approssimativamente costanti. Il secondo termine nell'equazione (3.13) tiene conto della condensazione che determina il passaggio di fase del vapore con una diminuzione del valore di soprasaturazione. Tale termine può essere riscritto introducendo il *tempo di assorbimento* della soprasaturazione τ_s :

$$A_2 \frac{d\rho_v}{dt} = -\frac{s}{\tau_s} \quad (3.14)$$

per le dimostrazioni dettagliate delle equazioni (3.13) e (3.14) si veda [26].

L'equazione di evoluzione (3.13) considera il valore di soprasaturazione uniforme in tutto il volume fluido e ne regola l'evoluzione temporale che dipende dalla velocità verticale, considerata costante. Tale considerazione è importante per la comprensione del modello classico e delle previsioni che ne conseguono.

3.3 Coalescenza

Le gocce in crescita per condensazione sono soggette alla forza gravitazionale e all'attrito dell'aria. Per le gocce più piccole ($R < 0.1 \text{ mm}$) la forza d'attrito supera l'attrazione gravitazionale, perciò esse fluttuano in sospensione all'interno della nuvola. Con l'aumentare delle dimensioni la competizione fra le due forze si sbilancia a favore dell'attrazione gravitazionale, e le gocce precipitano con una velocità terminale che dipende dalla loro dimensione.

In fase di caduta le gocce più grandi, che hanno velocità terminale maggiore, possono urtare contro gocce più lente che incontrano sulla loro traiettoria. Dopo l'urto è possibile che le due gocce proseguano separatamente il moto, ma con probabilità prossima all'unità si uniscono a formare una goccia di dimensioni maggiori. Il processo di urto tra gocce seguito dalla loro unione è chiamato *coalescenza*.

Esistono due diversi modi per descrivere tale meccanismo. Il primo considera che l'acqua all'interno della nuvola sia distribuita uniformemente e che, quindi, una goccia A in fase di caduta incrementi la sua massa in modo continuo. Per

una goccia A di massa m l'incremento dovuto alle gocce di massa compresa tra m' e $m' + dm'$ si scrive allora attraverso l'equazione:

$$d\dot{m}_{cont}(m') = A_m |v(m) - v(m')| m' N(m') \sum_c (m, m') dm', \quad (3.15)$$

dove $N(m')dm'$ è il numero di particelle di taglia compresa fra m' e $m' + dm'$ nell'unità di volume; $v(m)$ e $v(m')$ sono le velocità delle due particelle²; A_m è la sezione d'urto effettiva spazzata dalla particella A che, per gocce sferiche di raggi R e R' , vale $\pi(R + R')^2$. Il fattore $\sum_c (m, m') dm'$ è dato dal prodotto di un'efficienza di collisione e un'efficienza di coalescenza. La prima è determinata principalmente dal flusso relativo di aria intorno alla goccia. Infatti le particelle presenti lungo la traiettoria della goccia A possono essere spinte dal flusso verso l'esterno e quindi evitare l'urto (efficienza di collisione < 1). Al contrario il flusso d'aria può trasportare particelle dall'esterno sulla traiettoria della goccia in considerazione e quindi provocare l'urto (efficienza di collisione > 1). Una volta avvenuto l'urto le due gocce non necessariamente si uniscono

L'efficienza di coalescenza è la probabilità che la collisione fra due gocce sia seguita dalla loro unione. Esiste infatti la possibilità che le due particelle proseguano separatamente le loro traiettorie dopo l'urto, benché sia un evento piuttosto raro soprattutto per particelle cariche. Per questo motivo al fattore di coalescenza si assegna tipicamente il valore unitario.

L'effetto totale di crescita dato da tutti i possibili urti si ottiene integrando l'equazione (3.15) sui valori assunti da m' :

$$\dot{m}_{cont} = \int_0^\infty A_m |v(m) - v(m')| m' N(m') \sum_c (m, m') dm'. \quad (3.16)$$

Quanto visto presuppone che la crescita per coalescenza sia un processo continuo, ipotesi che risulta incompatibile con la natura discreta delle goccioline. Si può comprendere la natura probabilistica del meccanismo considerando la distribuzione di taglie $N(m, t)$, dove $N(m, t)dm$ è il numero di particelle di

²Nell'equazione (3.15) compare il valore assoluto della differenza di velocità, che risulta superfluo nel caso in cui si descriva la coalescenza di gocce piccole da parte di una particella più grande che precipita più velocemente ($m > m'$). In questo modo, però, l'equazione descrive anche il caso in cui la particella A abbia massa minore di m' , cioè la coalescenza di gocce grandi da parte di una particella più piccola che precipita con velocità minore.

massa compresa fra m e $m+dm$ al tempo t contenute nell'unità di volume. Una particella di massa m spazza il volume in cui è localizzata una particella di massa m' a un ritmo dato dal *collection kernel*, definito come:

$$\hat{K}(m, m') = A_m |v(m) - v(m')| \sum_c (m, m'). \quad (3.17)$$

La probabilità che avvengano l'urto e l'unione di una particolare gocciolina di massa m e una generica goccia di massa m' nell'intervallo Δt è determinata dalla seguente relazione:

$$\hat{P} = N(m', t) dm' \hat{K}(m, m') \Delta t, \quad (3.18)$$

dove abbiamo assunto che Δt sia sufficientemente piccolo perché si possa trascurare la probabilità che avvengano due urti nello stesso intervallo Δt . Sfruttando le (3.17) e (3.18) otteniamo che il numero medio di particelle di massa m che urta con particelle di massa m' nell'intervallo di tempo Δt è dato dalla seguente relazione:

$$\hat{P} N(m, t) dm = \hat{K}(m, m') N(m', t) N(m, t) dm dm' \Delta t$$

cioè:

$$\frac{\hat{P} N(m, t)}{\Delta t} = \hat{K}(m, m') N(m', t) N(m, t) dm', \quad (3.19)$$

che esprime il ritmo al quale il numero di gocce di massa m diminuisce a causa della coalescenza con gocce di massa m' . Integrando su tutti i possibili valori assunti da m' si ottiene l'effetto totale degli urti sul ritmo al quale scompaiono le gocce di massa m :

$$I_1(m) = \int_0^\infty \hat{K}(m, m') N(m', t) N(m, t) dm'. \quad (3.20)$$

Similmente gocce di taglie inferiori possono urtare e unirsi a formare una goccia di massa m , contribuendo all'incremento di $N(m, t)$ attraverso:

$$I_2(m) = \frac{1}{2} \int_0^m \hat{K}(m - m', m') N(m - m', t) N(m', t) dm', \quad (3.21)$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ si include per evitare il conteggio doppio della stessa coppia di particelle. Sottraendo la (3.20) dalla (3.21) si ottiene l'equazione differenziale per $N(m, t)$:

$$\left(\frac{\partial N(m, t)}{\partial t} \right)_{stoc} = I_2(m) - I_1(m). \quad (3.22)$$

3.4 Ampliamento dello spettro e previsioni del modello

In questo paragrafo concentriamo l'attenzione sull'equazione di condensazione (3.12) in cui la funzione $s(t)$ è determinata dall'equazione evolutiva classica per la soprasaturazione (3.13) descritta nel § 3.2. Consideriamo l'evoluzione del raggio (R) di una goccia contenuta in un volume fluido dato:

$$R \dot{R} = \frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{dt} = A_3 s(t), \quad (3.23)$$

dove il fattore A_3 è una costante per tutte le gocce. La soluzione della (3.23) con condizione iniziale R_0^2 è:

$$R^2(t) = R_0^2 + 2A_3 \int_0^t s(t') dt' \sim R_0^2 + 2A_3 \bar{s}t. \quad (3.24)$$

in cui il valore di soprasaturazione $s(t')$ è approssimato con il suo valor medio sulla base di una stima delle fluttuazioni temporali di soprasaturazione che si può vedere in [26]. La densità di goccioline tipica di una nuvola sviluppata indica la presenza di un numero molto elevato di goccioline ($\approx 10^5$) all'interno di ogni volume fluido considerato (le cui dimensioni sono tipicamente dell'ordine di 1 L). All'interno di questo volume è quindi possibile considerare la statistica dei valori assunti dal raggio delle goccioline al variare del tempo, che evolvono classicamente sperimentando tutte lo stesso valore di soprasaturazione funzione

del tempo. Come vedremo nel capitolo 4, in presenza di turbolenza la statistica dei raggi assunti dalle goccioline all'interno di un volume fluido non è rappresentativa del comportamento delle goccioline nell'intera nuvola. Infatti goccioline appartenenti al volume fluido in considerazione si separano rapidamente trasportate dal flusso turbolento ed evolvono sperimentando i valori di soprasaturazione presenti in tutta la nuvola. Questo rende necessaria una descrizione del campo di soprasaturazione estesa a tutta la nuvola.

Analizziamo quindi la previsione statistica ottenuta classicamente mediante l'analisi di un singolo volume fluido nell'ipotesi in cui la soprasaturazione sia uniforme nell'intero volume fluido. L'equazione (3.24) descrive il processo di condensazione che ha inizio con la fine del processo di nucleazione. Per questo motivo all'istante iniziale si ha una popolazione di particelle con una certa distribuzione di taglie che chiameremo $P_0(R_0^2)$. Nella trattazione non interessa la forma esplicita di tale distribuzione che dipende dalle peculiarità dei nuclei di condensazione e dalle condizioni atmosferiche e risulta molto stretta attorno a un valor medio di qualche μm .

La soluzione (3.24) ha, quindi, come condizioni iniziali tutti i possibili valori assunti da R^2 , distribuiti secondo la $P_0(R_0^2)$, con valor medio $\langle R_0^2 \rangle$ e varianza σ_0^2 , da cui mediando su tutte le particelle presenti nel volume fluido si ottiene:

$$\begin{aligned}\langle R^2 \rangle(t) &= \langle R^2 \rangle_0 + 2A_3 \bar{s}t \\ \sigma^2(t) &= \sigma_0^2.\end{aligned}\tag{3.25}$$

L'evoluzione $P(R^2, t)$ della distribuzione iniziale è, quindi, una traslazione rigida della stessa con valor medio che cresce linearmente nel tempo e varianza è costante:

$$P(R^2, t) = P(R^2 = R_0^2 + 2A_3 st) \equiv P_0(R_0^2 = R^2 - 2A_3 st).$$

Nell'evoluzione di $P(R^2, t)$ non è evidentemente previsto un allargamento dello spettro in quanto la varianza della distribuzione è costante. La grandezza di interesse, indicativa della dispersione di $P(R^2, t)$, non è tanto la varianza di $P(R^2, t)$, quanto il suo valore in rapporto al valor medio della distribuzione:

$$\frac{\langle R^4(t) \rangle - \langle R(t)^2 \rangle^2}{\langle R^2 \rangle^2}.\tag{3.26}$$

Tale rapporto tende a zero nel limite per t tendente a ∞ . Possiamo concludere che l'incremento del valor medio della distribuzione non è accostato a un analogo aumento della varianza. Quando $\langle R^2 \rangle(t)$ è sufficientemente elevato, la dispersione iniziale diventa trascurabile e tutte le gocce appaiono circa della stessa dimensione $\langle R^2 \rangle(t)$. In questo senso la $P(R, t)$ perde memoria della distribuzione iniziale e tende a stringersi attorno al suo valor medio.

Nel presente lavoro mi propongo di studiare i seguenti problemi connessi con le previsioni del presente modello:

1. Superata la fase di nucleazione, si osserva sperimentalmente un allargamento dello spettro di taglie, che prepara una popolazione di gocce con raggi molto diversi.
2. In atmosfera è stata osservata la formazione di gocce di pioggia anche in ambienti sottosaturi. Come risulta evidente dalla (3.25), il meccanismo di condensazione richiede la presenza di un ambiente soprasaturo. Infatti il tasso di crescita delle dimensioni delle goccioline è pari al valore di sopravvissutazione dell'ambiente, se esso è negativo le goccioline vanno incontro a evaporazione e il raggio medio quindi diminuisce.

Un modello che preveda un ampliamento dello spettro $P(R^2, t)$, innalza la probabilità di presenza di gocce molto piccole (lente) e gocce molto grandi (veloci). La presenza di una popolazione di goccioline con raggi molto diversi accelera la fase di coalescenza aumentando la velocità relativa media fra le particelle. Tale aumento provoca infatti l'incremento della probabilità di coalescenza come risulta evidente dall'espressione (3.17) per il collection kernel. In questo senso i primi due punti dell'elenco risultano strettamente collegati. La comprensione del processo di condensazione è quindi fondamentale per lo studio della fase di coalescenza. Il presente lavoro non si occupa di questo secondo aspetto che potrà essere sviluppato in seguito.



Capitolo 4

Condensazione e turbolenza

Le proprietà del trasporto turbolento descritte nei loro aspetti generali nel capitolo 2, sono ritenute cruciali al fine della comprensione dei problemi legati al modello di condensazione descritto al capitolo 3. Alcune delle proprietà statistiche dei campi turbolenti possono essere riprodotte sfruttando modelli stocastici come descritto al § 2.6.1 per il modello di Kraichnan. In questo capitolo, dopo una descrizione del sistema completo di equazioni che descrive la condensazione turbolenta, utilizziamo questo tipo di approccio per modellizzare il trasporto turbolento di vapore e gocce nelle nuvole. In prima approssimazione consideriamo un campo di soprasaturazione stocastico gaussiano e δ -correlato nel tempo. Quest'ultima ipotesi consente di ottenere un'equazione di Fokker-Planck chiusa per la distribuzione di dimensioni delle goccioline al variare del tempo. Tale equazione è di tipo diffusivo e la sua soluzione è una densità di probabilità con varianza proporzionale al tempo. È quindi previsto un ampliamento dello spettro ma non è sufficiente a giustificare le osservazioni.

Un risultato analogo si ottiene rimuovendo l'ipotesi di δ -correlazione. In tal caso il modello si riduce sostanzialmente a quello proposto in [2]. Con un campo di soprasaturazione con tempo di correlazione finito non possiamo scrivere un'equazione di Fokker-Planck chiusa per l'evoluzione dello spettro, ma è comunque possibile una stima approssimata della varianza. Quest'ultima risulta in ogni caso insufficiente per la spiegazione del fenomeno di ampliamento dello spettro.

Infine consideriamo un campo di soprasaturazione stocastico dipendente dallo spazio e dal tempo. In questo modo è possibile analizzare il ruolo delle strutture spaziali di scalare nell'ampliamento dello spettro. Anche in questo caso non possiamo scrivere un'equazione di Fokker-Planck chiusa per lo spettro di dimensioni delle gocce. Otteniamo comunque un'espressione per l'ampliamento

dello spettro che dipende dalla correlazione fra le traiettorie e il campo scalare. Tale correlazione risulta giustificata da un'analisi qualitativa delle due quantità trasportate (vapore e goccioline) e sarà valutata numericamente nel capitolo 5 per flussi turbolenti reali. Una seconda conseguenza dell'effetto di correlazione descritto è la possibilità di aumento del raggio medio anche in condizioni di so-prasaturazione nulla o addirittura negativa, eventualità che è stata osservata in atmosfera.

4.1 Modello turbolento

In questo paragrafo generalizziamo il modello di condensazione descritto al § 3.2, introducendo le equazioni che governano il trasporto turbolento. Le variabili che determinano lo stato di condensazione nella nuvola sono quattro:

- campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$;
- campo di vapore $\sigma(\mathbf{x}, t)$;
- raggio delle gocce $R(t)$;
- equazione del moto delle particelle $\mathbf{X}(t)$.

In questo paragrafo scriviamo le equazioni che regolano l'evoluzione delle incognite sopra elencate nel modello turbolento completo oggetto di questo lavoro di tesi. Per le nozioni fondamentali di meccanica dei fluidi, che supporremo note, si veda per esempio [3] o [21]. Supponiamo che il campo di velocità nella nuvola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sia incompressibile ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) e sia soluzione delle equazioni di *Navier – Stokes*:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\partial p + \nu \partial^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (4.1)$$

dove ν è la viscosità del flusso, \mathbf{f} è la forza per unità di massa e p è la pressione divisa per la densità del fluido ρ_f (considerata costante). Consideriamo il flusso in regime turbolento e assumiamo che sia ben descritto dalla teoria K41 di Kolmogorov, esposta nel § 2.2. L'energia cinetica $\langle \frac{\mathbf{v}^2}{2} \rangle$ del campo di velocità è quindi introdotta a grande scala dalla forzante \mathbf{f} e trasferita attraverso il fenomeno di cascata alle piccole scale, alle quali viene dissipata dalla diffusione molecolare.

Consideriamo il trasporto di vapore all'interno della nuvola osservando l'evoluzione del campo di soprasaturazione $s(\mathbf{x}, t)$. Supponiamo che s agisca in maniera trascurabile sul flusso \mathbf{v} e che il suo trasporto possa quindi essere considerato passivo (si veda § 2.4):

$$\partial_t s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla s(\mathbf{x}, t) = A_1 w(\mathbf{x}, t) - \frac{s(\mathbf{x}, t)}{\tau_s} + D \nabla^2 s(\mathbf{x}, t). \quad (4.2)$$

A secondo membro dell'equazione di trasporto (4.2) compaiono, oltre al termine diffusivo $D \nabla^2 s(\mathbf{x}, t)$, due ulteriori addendi:

- Il termine $A_1 w(\mathbf{x}, t)$ costituisce la sorgente della soprasaturazione determinata dal moto verticale. Qualitativamente l'aumento di quota di una molecola d'acqua corrisponde a un aumento di energia che favorisce l'evaporazione della molecola stessa contribuendo all'incremento di soprasaturazione. Tale incremento risulta quindi evidentemente legato alla velocità verticale w che, a differenza dei modelli classici, consideriamo determinata dalle equazioni di Navier-Stokes ($w = w(\mathbf{x}, t)$).
- Il termine $-\frac{s(\mathbf{x}, t)}{\tau_s}$, che chiameremo *assorbimento*, determina il decadimento di soprasaturazione dovuto alla condensazione. Essa infatti contribuisce alla sottrazione di molecole di vapore a favore dell'accrescimento delle gocce. Il tempo di assorbimento della soprasaturazione τ_s dipende, istante per istante, dalla distribuzione dei raggi delle gocce, come discusso in [29]:

$$\tau_s(t) \propto \int_0^\infty P(r, t) r dr.$$

Il parametro τ_s è quindi proporzionale al raggio medio che, nella fase di condensazione, varia molto lentamente (da 5 a 15 μm in circa 10 minuti [20]). I valori tipici di τ_s variano nell'intervallo da 1 a 10 s nelle nuvole calde sviluppate, e raggiungono 30-60 s nelle zone con una bassa densità di gocce (come osservato in [16]).

La descrizione dell'evoluzione di s attraverso il modello passivo attribuisce alla soprasaturazione le proprietà spaziali peculiari descritte dettagliatamente nel § 2.4.

Consideriamo ora il trasporto delle goccioline disperse all'interno della nuvola. Nel caso in cui la densità delle gocce sia prossima alla densità del fluido nel

quale sono immerse, le traiettorie delle stesse sono approssimabili a quelle delle particelle di fluido:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}(t), \quad (4.3)$$

in cui $\boldsymbol{\eta}(t)$ è il rumore bianco che si introduce per descrivere le traiettorie lagrangiane in presenza di processi diffusivi (si veda pag. 28). La validità di tale approssimazione dipende dal valore del numero di Stokes associato alle particelle: $St = \frac{\tau_d}{\tau_f}$, dove τ_f e τ_d sono scale temporali associate rispettivamente al flusso e alla particella. La scala temporale minima associata ai moti turbolenti atmosferici si può stimare come $\tau_f \sim (\frac{\nu}{\epsilon})^{1/2}$ da cui, tenendo conto della definizione (2.15) di τ_d , otteniamo la seguente espressione per il numero di Stokes:

$$St = \frac{\tau_d}{\tau_f} \sim \frac{2\rho_d \epsilon^{1/2} r^2}{9\rho_f \nu^{3/2}}$$

Per una gocciolina di raggio $\approx 10 \mu\text{m}$ e densità $\approx 1 \text{ g cm}^{-3}$ in atmosfera il numero di Stokes è circa $St \approx 0.02$ (con $\epsilon \approx 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ e $\nu \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Nella fase di condensazione è quindi pienamente giustificata l'approssimazione delle goccioline come particelle fluide. Gli effetti di inerzia (e quindi la coalescenza) iniziano a diventare significativi per le gocce di raggio $25 \mu\text{m}$, per le quali, con gli stessi valori di ν e ϵ considerati sopra, il numero di Stokes è di circa $St \approx 0.14$.

L'evoluzione del raggio di ogni gocciolina è qui descritta in approssimazione quasi-statica dall'equazione classica (3.12):

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{A_3 s(\mathbf{X}(t), t)}{R(t)}. \quad (4.4)$$

Tale approssimazione è pienamente giustificata anche considerando il trasporto turbolento nella nuvola. Infatti, come discusso dettagliatamente in [34], il tempo massimo impiegato dalle quantità termodinamiche locali per raggiungere l'equilibrio risulta comunque molto minore del tempo minimo che caratterizza le fluttuazioni turbolente in condizioni atmosferiche tipiche. Tali condizioni non sono verificate nel caso in cui si sia interessati al comportamento delle gocce in fase di coalescenza ($r > 25 \mu\text{m}$) e con un tasso di dissipazione di energia cinetica media specifica superiore a $0.02 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$. Il valore della soprassaturazione che compare a secondo membro non è più dato in funzione del tempo, come nel modello

classico, ma si ottiene dalla soluzione dell'equazione di trasporto (4.2) calcolata sulle traiettorie (4.3) delle goccioline. L'equazione di evoluzione del raggio può essere riscritta come segue:

$$\frac{dR^2(t)}{dt} = 2A_3 s(\mathbf{X}(t), t). \quad (4.5)$$

L'equazione (4.5) riguarda l'evoluzione del quadrato del raggio di ogni singola particella. Per ottenere il valor medio e la varianza di $R^2(t)$ al variare del tempo dobbiamo mediare su tutte le possibili traiettorie lagrangiane $\mathbf{X}(t)$ così come descritto nel § 2.4 per l'evoluzione lagrangiana dello scalare passivo. Come vedremo nel § 4.2, tale operazione suggerisce che, se una correlazione fra le traiettorie lagrangiane e l'intensità dello scalare esiste, allora essa risulta cruciale nella determinazione del valor medio e della varianza di R^2 .

Riassumendo, le equazioni incluse nel modello proposto sono:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\partial p + \nu \partial^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \\ \partial_t s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla s(\mathbf{x}, t) = A_3 w(\mathbf{x}, t) - \frac{s(\mathbf{x}, t)}{\tau_s} + D \nabla^2 s(\mathbf{x}, t) \\ \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{2D} \boldsymbol{\eta}(t) \\ \frac{dR^2(t)}{dt} = 2A_3 s(\mathbf{X}(t), t). \end{cases} \quad (4.6)$$

Il sistema di equazioni descritto richiede una trattazione di tipo numerico, di cui ci occuperemo nel capitolo 5. Per lo svolgimento analitico dei conti è necessario assumere ipotesi semplificative che risultano non verificate nei flussi reali. Riteniamo comunque di interesse per la comprensione teorica del problema la presentazione di tali modelli semplificati, che forniscono una previsione del comportamento reale nel limite per tempi di correlazione piccoli.

4.2 Modelli stocastici

Le equazioni di Navier-Stokes (4.1) e dello scalare passivo (4.2) non sono risolubili analiticamente. Le osservazioni sui flussi turbolenti indicano la presenza di campi molto complessi che risultano impredicibili nel loro comportamento dettagliato. si

sceglie quindi di utilizzare una descrizione statistica della turbolenza nonostante le equazioni scritte regolino deterministicamente il comportamento del fluido. Tale approccio è giustificato dall'osservazione delle quantità statistiche associate ai campi turbolenti, che risultano riproducibili. In accordo con quanto detto consideriamo i campi $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $s(\mathbf{x}, t)$ costituiti da un valor medio costante e da fluttuazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \\ s(\mathbf{x}, t) &= \bar{s} + s'(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Le fluttuazioni \mathbf{v}' ed s' sono modellizzate come campi stocastici a media nulla statisticamente omogenei e stazionari (per il significato di queste ipotesi si veda pag. 4). Il valor medio di soprasaturazione \bar{s} è di circa 0.01 in atmosfera e il suo effetto è noto a partire dal modello classico. A seconda delle proprietà attribuite ai campi otteniamo previsioni differenti sullo spettro di dimensioni delle gocce. Nel seguito indichiamo con le lettere maiuscole le quantità lagrangiane, cioè calcolate sulle traiettorie delle particelle e con le lettere minuscole le quantità euleriane cioè calcolate in tutti i punti dello spazio. In particolare R e \mathbf{X} sono il raggio e la posizione delle goccioline, mentre r e \mathbf{x} sono i possibili valori assunti da tali variabili; S è la soprasaturazione calcolata sulla traiettoria della gocciolina mentre s è il campo euleriano di soprasaturazione.

4.2.1 Fluttuazioni temporali di soprasaturazione

Come primo caso supponiamo che le fluttuazioni dello scalare siano modellizzate da un processo stocastico gaussiano a media nulla caratterizzato dalla seguente correlazione:

$$\langle s'(t)s'(t') \rangle = \sigma\delta(t - t')\tag{4.8}$$

in cui si considerano fluttuazioni di soprasaturazione dipendenti unicamente dal tempo. In questo caso l'equazione evolutiva della variabile $R^2 \equiv Q$ associata ad ogni singola goccia è:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 2A_3(\bar{s} + s'(t)) \Rightarrow Q(t) = Q(0) + 2A_3\left(\bar{s}t + \int_0^t s'(\tau)d\tau\right)\tag{4.9}$$

Le evoluzioni del valor medio $\langle Q \rangle$ e della varianza $\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2$ sono date dalla conoscenza della distribuzione di probabilità delle dimensioni delle goccioline. In questo caso non è necessario scrivere un'equazione per la densità di probabilità delle dimensioni delle particelle. Infatti, grazie al teorema del limite centrale (si veda § 1.2), possiamo dedurre dall'equazione (4.9) che $Q(t)$ è una variabile gaussiana caratterizzata da media e varianza:

$$\begin{aligned}\langle Q(t) \rangle &= \langle Q(0) \rangle + 2A_3 \bar{s}t \\ \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 &= 4A_3^2 \sigma t,\end{aligned}\tag{4.10}$$

le cui dimostrazioni seguono direttamente dalla soluzione (4.9). Lo stesso risultato si ottiene scrivendo l'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione di probabilità¹ $P(q, t)$ associata all'equazione lagrangiana (4.9). Il problema è diffusivo e l'equazione di Fokker-Planck è analoga a quella scritta al § 2.6.1 per la densità di probabilità di posizione:

$$\partial_t P(q, t) = 2A_3^2 \sigma \frac{\partial^2 P(q, t)}{\partial q^2},\tag{4.11}$$

la cui soluzione è una gaussiana con valor medio nullo e varianza proporzionale al tempo

$$P(q, t) = (8\pi A_3^2 \sigma t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{(q-Q_0)^2}{8A_3^2 \sigma t}}.\tag{4.12}$$

Nel caso in cui la soprasaturazione sia schematizzata come un processo stocastico gaussiano e δ -correlato il campo di velocità non ha quindi ruolo nella determinazione dello spettro $P(q, t)$ che dipende unicamente dalle proprietà dello scalare $s(t)$.

Consideriamo ora un secondo caso in cui l'evoluzione di s è determinata dall'equazione (4.2) e modellizziamo stocasticamente il solo campo di velocità come un campo casuale dipendente unicamente dal tempo:

$$\langle v_i(t)v_j(t') \rangle = K_{ij} \frac{e^{\frac{-(t-t')^2}{2\tau_w^2}}}{2\tau_w^2},$$

¹Si ricorda che $P(q, t)dq$ rappresenta la probabilità che il valore della variabile Q di una generica gocciolina sia compreso fra q e $q + dq$.

in cui τ_w è il tempo di correlazione del campo di velocità. L'equazione di Fokker-Planck per la PDF della variabile Q non si chiude ma tuttavia si ottiene nuovamente, grazie al teorema del limite centrale, lo stesso tipo di evoluzione del valor medio $\langle Q \rangle$ e della varianza $\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2$ del caso precedente che riproduce il risultato insoddisfacente ottenuto da Bartlett e Jonas [2]: consideriamo l'equazione di evoluzione lagrangiana corrispondente all'equazione euleriana (4.2)

$$\frac{dS(t)}{dt} = A_1 w(t) - \frac{S(t)}{\tau_s} \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow S(t) = S_0 e^{-\frac{t}{\tau_s}} + A_1 \tau_s \int_0^t w(t') dt' \approx A_1 \tau_s \int_0^t w(t') dt' \quad \text{per } t \gg \tau_s, \quad (4.14)$$

Dalla soluzione (4.14) per il teorema del limite centrale applicato al caso descritto a pag. 6, per tempi molto più grandi del tempo di correlazione del campo di velocità τ_w , il valore della soprasaturazione approssima una variabile gaussiana con media $\langle S \rangle = A_1 \langle w \rangle \tau_s$, e varianza

$$\langle S(t)S(t') \rangle - \langle S(t) \rangle^2 = \frac{1}{2} A_1^2 K \tau_s e^{-\frac{|t-t'|}{\tau_s}},$$

dove $K \equiv K_{33}$. La variabile lagrangiana $Q(t)$ evolve in accordo con la medesima equazione del caso precedente:

$$Q(t) = Q(0) + 2A_3 \int_0^t S(t') dt', \quad (4.15)$$

che ancora una volta tende a una variabile gaussiana per tempi $t \gg \tau_s$ che corrisponde al tempo di correlazione della variabile S . Dallo sviluppo dell'equazione di evoluzione (4.15) otteniamo facilmente le espressioni del valor medio e della varianza della variabile Q :

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \rangle &= \langle Q(0) \rangle + 2A_1 A_3 \langle w \rangle \tau_s t \\ \langle Q^2(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle^2 &= 2A_1^2 A_3^2 K \tau_s^2 t \end{aligned} \quad (4.16)$$

Come si può vedere dal confronto fra le evoluzioni (4.10) e (4.16) della variabile $Q(t)$ nei due casi descritti, per tempi t molto maggiori del tempo di correlazione della velocità verticale τ_w e della soprasaturazione τ_s , si ha una forte analogia, è sufficiente identificare:

$$\begin{aligned}\bar{s} &= A_1 \langle w \rangle \tau_s \\ \sigma &= A_1^2 K \tau_s^2\end{aligned}\tag{4.17}$$

In ognuno dei due casi otteniamo informazioni sullo spettro di dimensioni delle goccioline:

- Il valor medio di $Q = R^2$ cresce linearmente con il tempo in un ambiente soprasaturo. Il tasso di crescita è infatti proporzionale al valor medio euliano di soprasaturazione \bar{s} cioè inteso su tutti i punti dello spazio: se esso è negativo si va incontro a evaporazione. Coerentemente il valor medio del raggio delle goccioline cresce (o decresce) in ambienti con soprasaturazione positiva (o negativa) con un andamento del tipo $\langle R(t) \rangle \sim t^{1/2}$.
- L'ampiezza della distribuzione dei valori assunti dalla variabile Q è invece misurata dalla quantità $\sqrt{\langle Q^2(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle^2} \propto t^{1/2}$. Il modello stocastico descritto prevede quindi un allargamento dello spettro ma molto più lento rispetto all'aumento del valor medio.

Come osservato in [2] questa previsione non è sufficiente a giustificare il fenomeno di allargamento dello spettro. Il modello richiede inoltre come condizione necessaria perché possa avvenire il fenomeno di condensazione, la presenza di un valor medio di soprasaturazione strettamente positivo. Consideriamo quindi una generalizzazione di quanto visto che sia in grado di precisare il ruolo delle strutture spaziali dei campi stocastici s e v .

4.3 Fluttuazioni spazio-temporali di soprasaturazione

In questo paragrafo consideriamo fluttuazioni stocastiche dei campi turbolenti variabili nello spazio e nel tempo confrontando il caso δ -correlato con il caso di correlazione temporale finita. Come vedremo l'ipotesi di δ -correlazione temporale consente la chiusura dell'equazione di Fokker-Planck ma rende inutile l'introduzione di strutture spaziali. Per comprendere qualitativamente la spiegazione di

tal comportamento consideriamo la percezione del campo s da parte di una gocciolina isolata. Per sperimentare la correlazione di s fra due punti dello spazio è necessario che la particella si sposti dal primo punto al secondo. Nonostante i due punti possano essere molto vicini la gocciolina impiega un certo intervallo di tempo finito Δt per lo spostamento. Se il campo di soprasaturazione è δ -correlato nel tempo, la sua correlazione spaziale è istantanea, e prima che la gocciolina raggiunga il secondo punto dello spazio il campo si è decorrelato.

Per valutare il ruolo delle strutture spaziali nel fenomeno di ampliamento dello spettro sarà quindi necessario rimuovere l'ipotesi di δ -correlazione.

Consideriamo in primo luogo una coppia di campi stocastici con correlazione spaziale non banale e media nulla, δ -correlati nel tempo:

$$\begin{aligned}\langle v_i(\mathbf{x}, t)v_j(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= K_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau) \\ \langle s'(\mathbf{x}, t)s'(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= \Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)\end{aligned}\tag{4.18}$$

Siamo interessati ad ottenere un'equazione per la PDF $P(\mathbf{x}, q, t)$ al variare del tempo, che indica la densità di probabilità che una gocciolina si trovi nel punto \mathbf{x} al tempo t con raggio t.c. $R^2 = q$. Tale equazione, che prende il nome di equazione di Fokker-Planck è la corrispondente euleriana del problema lagrangiano identificato dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = 2A_3[\bar{s} + s'(\mathbf{X}(t), t)] \end{cases}\tag{4.19}$$

(per approfondimenti si veda per esempio [27] o [13]). Otteniamo l'equazione di Fokker-Planck a partire dalla seguente relazione, introdotta nel § 2.6.1:

$$p(\mathbf{x}, q, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t))\delta(q - Q(t)) \rangle\tag{4.20}$$

in cui indichiamo con le lettere maiuscole \mathbf{X} e Q i valori assunti dalle variabili \mathbf{x} e q sulle traiettorie delle particelle. Dall'equazione (4.20) otteniamo, derivando rispetto al tempo:

$$\partial_t p(\mathbf{x}, q, t) = -\frac{d}{dx_i}[(u_i(\mathbf{x}, t) + \eta_i(t))p(\mathbf{x}, q, t)] - 2A_3\frac{\partial}{\partial q}[p(\mathbf{x}, q, t)(\bar{s} + s'(t))]\tag{4.21}$$

Nell'equazione (4.21) compaiono i campi di velocità, rumore e soprasaturazione. Introduciamo la distribuzione di probabilità $P(\mathbf{x}, q, t) = \langle p(\mathbf{x}, q, t) \rangle_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, s}$ che non dipende dai campi stocastici e otteniamo dall'equazione (4.21) un'equazione per $P(\mathbf{x}, q, t)$:

$$\partial_t P(\mathbf{x}, q, t) = -\frac{d}{dx_i} \langle (u_i(\mathbf{x}, t) + \eta_i(t)) p(\mathbf{x}, q, t) \rangle - 2A_3 \frac{\partial}{\partial q} \langle p(\mathbf{x}, q, t) (\bar{s} + s'(t)) \rangle \quad (4.22)$$

Sfruttando l'integrazione gaussiana per parti attraverso il procedimento indicato al § 1.4.1 si possono svolgere le operazioni di media che compaiono nell'equazione (4.22). L'integrazione formale dell'equazione (4.21) fornisce infatti un'espressione implicita per $p(x, q, t)$ considerata come funzionale dei campi stocastici \mathbf{v} , $\boldsymbol{\eta}$ ed s , proprio come nel caso discusso al § 1.4.1:

$$p_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, s}(\mathbf{x}, q, t) = - \int_0^{\mathbf{x}} d\mathbf{x}' p(\mathbf{x}', q, t) (\mathbf{v}(\mathbf{x}', t) + \sqrt{2D} \boldsymbol{\eta}(t)) - \int_0^t d\tau p(\mathbf{x}, q, \tau) s'(\tau). \quad (4.23)$$

A partire dall'espressione implicita (4.23) della PDF $p_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, s}(x, q, t)$ possiamo calcolarne le derivate funzionali di rispetto ai campi \mathbf{v} , $\boldsymbol{\eta}$ ed s dai quali dipende. Grazie all'ipotesi di δ -correlazione, nel calcolo della derivata funzionale $\delta p_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, s}(\mathbf{x}, q, t)/\delta s$ è possibile considerare solo la dipendenza diretta del funzionale $p_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, s}$ da s che compare nella (4.23). Una considerazione analoga è valida per la derivata funzionale di p rispetto a \mathbf{v} e rispetto a $\boldsymbol{\eta}$ e permette di chiudere l'equazione di Fokker-Planck per la PDF mediata sulle realizzazioni del rumore $\boldsymbol{\eta}$, del campo di velocità \mathbf{v} e del campo di soprasaturazione s :

$$\partial_t P(\mathbf{x}, q, t) = (D + \frac{K_{ii}(0)}{2}) \nabla^2 P(\mathbf{x}, q, t) + A_3 \Sigma(0) \frac{\partial^2}{\partial q^2} P(\mathbf{x}, q, t) \quad (4.24)$$

Nell'equazione di Fokker-Planck (4.24) compaiono $K_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e $\Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ esclusivamente calcolate in $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Ciò significa che, come anticipato precedentemente, l'ipotesi di δ -correlazione rende inutile l'introduzione della dipendenza spaziale nelle funzioni di correlazione (4.18) che intervengono nell'equazione di Fokker-Planck (4.24) solo come coefficienti costanti. Introduciamo quindi una

descrizione realistica delle proprietà statistiche dei campi \mathbf{v} ed s che indica l'importanza di un'eventuale correlazione fra lo scalare e la probabilità di presenza delle goccioline. La verifica dell'effettiva presenza della correlazione e delle conseguenze quantitative sullo spettro di dimensioni delle goccioline è affidata all'analisi numerica.

4.4 Effetti della correlazione e analisi numerica

Consideriamo campi di soprasaturazione e velocità con tempi di correlazione finiti e dipendenza spaziale non banale. Il problema risulta identificato lagrangianamente dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}(t) \\ \frac{dQ((\mathbf{X}(t))}{dt} = 2A_3(\bar{s} + s'(\mathbf{X}(t), t)) \end{cases} \quad (4.25)$$

con le seguenti proprietà statistiche dei campi stocastici:

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{x}, t)v_j(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})F_{\tau_v}(t - \tau) \\ \langle s'(\mathbf{x}, t)s'(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})G_{\tau_s}(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Siamo interessati a conoscere il valor medio e la varianza della quantità q la cui evoluzione è determinata lagrangianamente dal sistema di equazioni (4.25). A tal fine integriamo l'equazione di evoluzione per Q lungo una singola traiettoria lagrangiana e sfruttiamo la PDF $P(\mathbf{x}, q, t)$ per mediare la soluzione ottenuta su tutte le possibili traiettorie lagrangiane definite dalla prima equazione del sistema (4.25):

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) + 2A_3\bar{s}t + \int_0^t s'(\mathbf{X}(t'), t')dt' \\ \langle Q \rangle(t) &= \langle Q(0) \rangle + 2A_3\bar{s}t + \int s'(\mathbf{x}, t') \left[\int_0^\infty P(\mathbf{x}, q, t)dq \right] d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se, come intendiamo verificare in questa tesi, esiste una correlazione fra la presenza di particelle e la distribuzione spaziale dello scalare $s(\mathbf{x}, t)$, la densità

di probabilità $P(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty P(\mathbf{x}, q, t) dq$ non risulta omogenea. Ne risulta la possibilità (verificata dalle simulazioni numeriche, si veda pag. 79) che il *valor medio lagrangiano* dello scalare

$$\langle s' \rangle_{lag} = \int s'(\mathbf{x}, t') \left[\int_0^\infty P(\mathbf{x}, q, t) dq \right] d\mathbf{x} \quad (4.28)$$

sia non nullo nonostante la proprietà euleriana $\bar{s} = 0$ in cui la media è intesa su tutti i punti dello spazio.

La presenza di correlazione è comprensibile qualitativamente grazie all'esistenza del processo di evaporazione: una gocciolina che sperimenti per un tempo prolungato una fluttuazione negativa può evaporare completamente contribuendo alla sottrazione di goccioline dalle zone sottosature. In questo modo si verifica un meccanismo di selezione delle fluttuazioni positive che differenzia in maniera netta il valor medio lagrangiano da quello euleriano. Come vedremo tale differenza si riflette sia sulla media di q sia sulla sua varianza $\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$ che determina il fenomeno di ampliamento dello spettro.

Consideriamo un ambiente caratterizzato da un valor medio euleriano di so-prasaturazione nullo $\bar{s} = 0$. In un ambiente di questo tipo il modello classico prevede l'arresto della condensazione e un valor medio $\langle q \rangle$ costante. Se esiste un fenomeno di correlazione del tipo descritto qualitativamente, dall'equazione (4.27) otteniamo che il valor medio lagrangiano produce comunque una crescita efficace di $\langle q \rangle$ nel tempo.

In analogia a quanto descritto per il valor medio della variabile q analizziamo ora la sua varianza. Dalla seconda equazione del sistema (4.25) otteniamo un'equazione per l'evoluzione di $\langle Q^2 \rangle$:

$$\frac{d\langle Q^2(t) \rangle}{dt} = 4A_3 \bar{s} \langle Q \rangle + 4A_3 \langle Q(t) s'(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (4.29)$$

in cui nuovamente la media a secondo membro è fatta sulle traiettorie delle goccioline e si può scrivere come:

$$\langle Q s' \rangle = \iint P(\mathbf{x}, q, t) s'(\mathbf{x}, t) q d\mathbf{x} dq,$$

quantità che risulta strettamente dipendente dalla correlazione presente fra il campo s' e la distribuzione spaziale delle goccioline.

Il meccanismo di selezione delle fluttuazioni descritto qualitativamente sopra, suggerisce la presenza di correlazione. La formalizzazione di tale fenomeno è affidata alle equazioni (4.28) e (4.29), che non possono essere risolte analiticamente se non nell'ipotesi di δ -correlazione temporale. Come risulta dall'analisi esposta al § 4.3 tale ipotesi vanifica gli effetti di correlazione spaziale e si rende quindi indispensabile l'analisi numerica del sistema completo (4.6) descritta nel prossimo capitolo.

Capitolo 5

Analisi numerica

In questo capitolo è presentata l'analisi numerica del modello turbolento descritto nel capitolo 4, finalizzata alla valutazione della correlazione fra le traiettorie delle goccioline e il valore di soprasaturazione. Una volta verificata l'effettiva presenza della correlazione indaghiamo numericamente il suo effetto sul fenomeno di ampliamento dello spettro che è stato osservato nelle nuvole durante la fase di condensazione. Simulazioni che risolvono piccole porzioni di nuvola [35] mostrano un ampliamento limitato dello spettro, risultato che conferma la scarsa significatività del volume fluido nell'ambito di un modello turbolento di condensazione. Tale osservazione giustifica la scelta di una descrizione accurata delle scale spaziali associate all'intera nuvola e la conseguente rinuncia ai dettagli delle piccole scale. Le strutture spaziali del campo di soprasaturazione caratterizzate da scale minori del passo griglia $\delta x \approx 10$ m, che chiameremo *subgrid scales*, non sono risolte dalla simulazione ed è quindi considerato valido, per le subgrid scales, il modello classico.

Sono inoltre discusse le scelte dei parametri delle simulazioni che riproducono le condizioni fisiche realistiche del problema. Infine è presentata una serie di simulazioni che mostrano la presenza di una forte correlazione fra le traiettorie delle goccioline e il valore di soprasaturazione: l'effetto di tale correlazione risulta determinante nel fenomeno di allargamento dello spettro.

Il codice numerico utilizzato è qui introdotto brevemente poiché la descrizione dettagliata degli schemi di integrazione temporale e del metodo pseudospettrale si può trovare in appendice A.

5.1 Discretizzazione e metodo pseudospettrale

In questo paragrafo intendiamo fornire una breve descrizione del funzionamento del codice utilizzato per le simulazioni, per una descrizione dettagliata si rimanda all'appendice A.

La risoluzione numerica delle equazioni che compongono il sistema (4.6) necessita evidentemente di una limitazione del dominio di definizione spaziale e temporale. Si considera quindi l'evoluzione dei campi di velocità e soprasaturazione e delle variabili lagrangiane posizione e raggio delle particelle in un dominio spaziale bidimensionale quadrato Ω di lato L nell'intervallo temporale $(0, T)$.

La descrizione analitica di un campo definito su Ω prevede la conoscenza del suo valore *in ogni punto* $\mathbf{x} \in \Omega$. La conoscenza numerica del campo è invece necessariamente limitata a un numero finito di punti. Suddividiamo quindi il lato L in N intervalli di lunghezza $\delta x \equiv L/N$ (che chiameremo *passo griglia*), che definiscono una griglia di $N \times N$ punti $\mathbf{x}_{ij} = (x_i, y_j)$. Il valore di N corrisponde alla *risoluzione* della simulazione.

La discretizzazione in spazio fisico si riflette in spazio di Fourier nell'analogia suddivisione del dominio Ω_k in un reticolo di $N \times N$ punti distanziati da $\delta k = 2\pi/L$. La formulazione delle equazioni (4.6) in spazio di Fourier rende banali le operazioni di derivazione che diventano semplici prodotti. Contemporaneamente complica il calcolo di quelli che in spazio fisico sono semplici prodotti e in spazio di Fourier diventano convoluzioni. Il metodo pseudospettrale sfrutta la formulazione delle equazioni in spazio di Fourier per il calcolo delle derivate e passa in spazio fisico per il calcolo dei prodotti. Tale passaggio avviene per mezzo della *fast Fourier Transform* (FFT) discreta, algoritmo che consente il calcolo della trasformata di Fourier in un numero di operazioni vantaggioso, con conseguente diminuzione del tempo impiegato dalla simulazione.

L'evoluzione delle variabili di interesse non può essere descritta numericamente su un intervallo temporale continuo: è necessario discretizzare l'intervallo $(0, T)$ in *passi temporali* δt e utilizzare metodi di integrazione discreta delle equazioni evolutive.

Le equazioni di evoluzione dei campi (4.1) e (4.2) sono integrate in tre fasi successive. Nella prima fase si integrano esattamente i termini viscoso e diffusivo. Nella seconda fase, tralasciando il termine di forzante, si calcola il termine avvettivo sfruttando il metodo pseudospettrale e si applica quindi lo schema di integrazione temporale di Runge-Kutta. Infine per il campo di velocità si integra la forzante schematizzata da un processo stocastico gaussiano δ -correlato nel tempo mentre per il campo di soprasaturazione, come descritto in appendice A,

l'integrazione della forzante è inclusa nelle due fasi precedenti. Le equazioni di evoluzione delle quantità lagrangiane sono invece integrate con il metodo di Eulero.

5.2 Scelta dei parametri

Per ottenere risultati significativi è necessario identificare i parametri fisicamente rilevanti per il problema e scegliere sulla base di stime realistiche i valori ad essi assegnati.

La risoluzione delle simulazioni è il valore del parametro N introdotto al § 5.1 e indica il numero di punti griglia del reticolo di discretizzazione spaziale. Nelle simulazioni effettuate la risoluzione è 128, da cui la scala minima risolta è $\delta x = L/128$.

Parametri del campo di velocità

I parametri del campo di velocità bidimensionale $\mathbf{v} = (u, w)$ sono stati fissati ai valori tipici presenti in atmosfera prendendo come riferimento le grandi scale (dimensioni della nuvola, $L \approx 10^3$ m): le fluttuazioni tipiche di velocità alla scala L in atmosfera sono $\delta_L |\mathbf{v}| \approx 1 \text{ m s}^{-1}$ e i tempi caratteristici associati alle grandi scale sono $\tau_L \approx 10^3$ s. Con questi valori si ottiene, dalla stima di natura dimensionale data dalla K41,

$$\epsilon \sim \frac{L^2}{\tau_L^3} \approx 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-3}$$

che si trova nell'intervallo molto ampio (da 10^{-5} a 10^{-1} $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$) di valori tipici del parametro ϵ . Il campo di velocità si trova nello stato stazionario in regime di cascata inversa (descritto al § 2.3).

La minima scala spaziale risolta è $\delta x \approx L/128 \approx 10$ m, ma la scala alla quale termina il range inerziale è determinata dalla forma dello spettro di energia $E(k)$ del campo di velocità, mostrato in fig. 5.1 insieme alla retta $k^{-\frac{5}{3}}$. Il range inerziale si estende a partire dal valore $k_L \approx 6 \times 10^{-3}$ m^{-1} fino al valore $k_l \approx 8 \times 10^{-2}$ m^{-1} . Il numero d'onda massimo k_l definisce la minima scala inerziale $l \approx 2\pi/k_l \approx 50$ m al di sotto della quale il comportamento del campo di velocità simulato è diffusivo.

In atmosfera la scala di Kolmogorov, al di sotto della quale si estende effettivamente il range diffusivo, è dell'ordine del mm, ma risulta numericamente

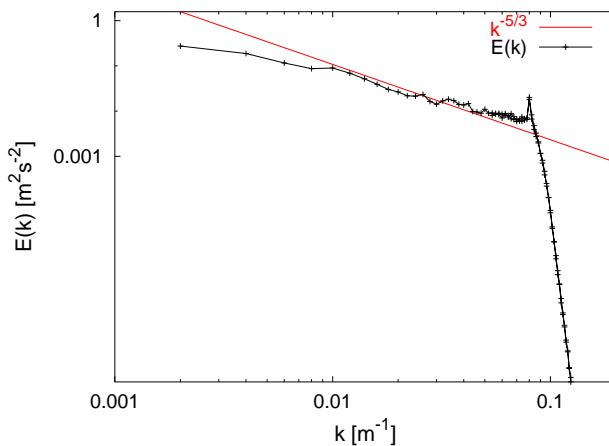


Figura 5.1: Spettro di energia $E(k)$ ottenuto dalle simulazioni effettuate. I parametri caratteristici del campo di velocità sono costanti per tutte le simulazioni. Si noti l'accordo con l'andamento previsto dalla K41 nel range inerziale, che si estende da $k_L \approx 6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ e $k_l \approx 8 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$, dove k_L e k_l sono i numeri d'onda associati rispettivamente alla scala integrale L e alla scala l .

impossibile descrivere dettagliatamente un intervallo di scale di 6 decadi (da 10^3 a 10^{-3} m). I tempi richiesti da una simulazione di questo tipo sono infatti giganteschi come risulta da questo semplice calcolo. Le simulazioni in 2 dimensioni con risoluzione 128^2 impiegano circa 1 minuto, e risolvono le scale da 1000 m a 10 m. Per risolvere le scale da 1 km a 1 mm occorre aumentare la risoluzione di un fattore 10^4 che in due dimensioni impiega, quindi, 10^8 minuti, cioè circa 200 anni. In tre dimensioni i tempi sono ulteriormente ingigantiti: anche supponendo che la simulazione a 128^3 impieghi 1 minuto, l'aumento di risoluzione di un fattore 10^4 richiede un tempo di circa 10^{12} minuti, cioè circa 2 milioni di anni che i processori migliori al mondo possono ridurre al più di un fattore 1000.

È quindi necessario scegliere quale intervallo di scale si considera fondamentale. Abbiamo qui scelto di descrivere precisamente le grandi scale rinunciando ai dettagli delle scale al di sotto di 50 m che in atmosfera sono turbolente. Tale scelta è motivata dall'osservazione dei risultati ottenuti in [35]: essi mostrano che simulazioni di porzioni ristrette della nuvola non sono in grado di giustificare l'ampliamento dello spettro osservato. Il fallimento di tali simulazioni, come vedremo (pag. 75), conferma la scarsa significatività del volume fluido che risulta non rappresentativo del comportamento globale delle goccioline. Risulta quin-

di cruciale la descrizione dell'intera nuvola da cui segue la rinuncia ai dettagli delle piccole scale che rendono le simulazioni troppo lente anche per i migliori processori attuali.

Campo di soprasaturazione

Fissato il campo di velocità passiamo alla descrizione del campo scalare s . Il parametro fondamentale per il campo di soprasaturazione è il valore del tempo di assorbimento τ_s . Come discusso a pag. 57 il valore di tale parametro determina l'ampiezza delle fluttuazioni di scalare che si possono valutare come descritto a pag. 63:

$$s' \sim A_1(\delta_L w) \tau_s \quad (5.1)$$

τ_s assume i valori compresi nell'intervallo da 1 a 10 s nelle nuvole calde sviluppate e può arrivare fino a un minuto nelle zone caratterizzate da una bassa densità di goccioline (dati discussi dettagliatamente in [16]). I risultati qui presentati sono ottenuti attraverso una serie di tre simulazioni distinte dal valore di τ_s : i valori scelti come rappresentativi dell'intervallo da 0 a 60 s sono (a) 5 s, (b) 25 s e (c) 50 s che indicano la presenza di fluttuazioni di soprasaturazione dell'ordine di (a) 0.0025, (b) 0.0125 e (c) 0.025, che sono valori tipici per le nuvole continentali. In fig. 5.2 è mostrato lo spettro di valori assunti dal campo di soprasaturazione in ogni punto dello spazio: l'ampiezza delle tre PDF ottenute per i tre valori di τ_s indicati, varia notevolmente in accordo con la stima (5.1). Il valor medio euleriano è stato fissato per tutte le simulazioni al valore $\bar{s} = 0$ che determina un ambiente saturo. Le fluttuazioni di soprasaturazione coincidono, quindi, con il valore del campo totale $s = \bar{s} + s' = s'$. Si noti che sotto questa ipotesi il raggio medio delle goccioline è previsto classicamente costante, mentre, come vedremo, le simulazioni del modello turbolento introdotto mostrano un aumento del raggio medio.

Si noti che la stima (5.1) dipende fortemente dalla scelta della scala massima risolta L . Scegliendo di risolvere una piccola porzione della nuvola, per esempio $L' = 1$ m, si ottiene conseguentemente un valore tipico di fluttuazioni di velocità ridotto rispetto al caso in cui si scelga $L = 10^3$ m. Sfruttando lo scaling alla Kolmogorov si ottiene infatti, per un valore fissato di ϵ :

$$\frac{\delta_{L'} w}{\delta_L w} \sim \left(\frac{L'}{L} \right)^{1/3} \approx 0.1$$

da cui le fluttuazioni di soprasaturazione si riducono di un fattore 10, che le rende insignificanti. Le simulazioni di porzioni limitate della nuvola non sono quindi in grado di evidenziare gli effetti determinati dalle fluttuazioni di soprasaturazione.

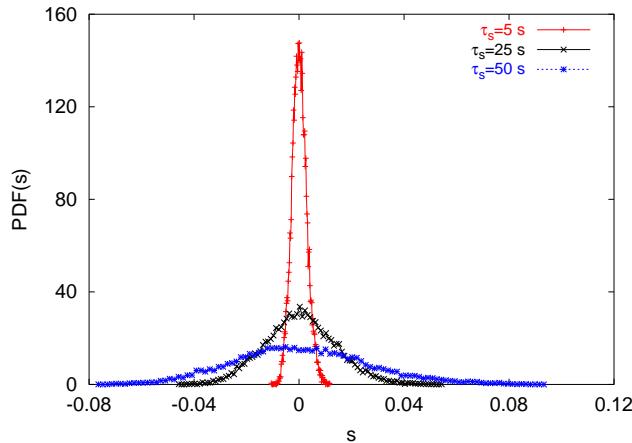


Figura 5.2: Spettro euleriano della soprasaturazione nei tre casi $\tau_s=5 \text{ s}$ (in rosso), $\tau_s=25 \text{ s}$ (in nero) e $\tau_s=50 \text{ s}$ (in blu). Si noti come il valore di τ_s determini l'ampiezza di fluttuazioni dello scalare il cui valor medio risulta comunque nullo.

Parametri caratteristici delle quantità lagrangiane

Il parametro caratteristico delle quantità lagrangiane è il numero di goccioline considerato. Nella fase di condensazione tale valore non influenza la dinamica delle gocce in quanto le interazioni reciproche fra le goccioline risultano trascurabili. La scelta è dettata quindi solo dalla necessità di un numero di particelle sufficiente per rendere significativa la statistica.

Abbiamo scelto di adottare condizioni al contorno *assorbenti* per il raggio delle goccioline. Consideriamo cioè l'evoluzione di una popolazione di circa 20000 goccioline ognuna delle quali viene eliminata quando va incontro a evaporazione completa. Alla fine della simulazione sopravvive circa la metà della popolazione iniziale. Una scelta alternativa è quella di condizioni al contorno che comportano la continua reimmissione di nuove goccioline che prendono il posto di quelle che evaporano completamente. Tale scelta corrisponde fisicamente alla presenza del fenomeno di *entrainment* che introduce nuovi CCN ovunque nella nuvola. Come discusso dettagliatamente in [33] la valutazione del ruolo dell'entrainment

nell'ampliamento dello spettro è complessa e non si può prescindere dalla sua disomogeneità spaziale motivo per il quale tale scelta è stata qui scartata.

Come osservato precedentemente l'identità di un singolo volume fluido non è preservata nell'ambito di un flusso turbolento. Infatti goccioline inizialmente appartenenti a un singolo volume fluido si separano molto rapidamente per effetto del trasporto turbolento. Una stima della separazione spaziale media $\langle |x_1 - x_2| \rangle$ fra due particelle fluide al variare del tempo è data dal modello di Richardson¹:

$$\langle |x_1 - x_2| \rangle \sim \epsilon^{1/2} t^{3/2} \approx 10^3 \text{ m} \quad \text{per } t \approx 10^3 \text{ s}$$

in cui si è sostituito il valore di $\epsilon \approx 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$. Tale stima indica che le particelle hanno la possibilità di sperimentare le condizioni presenti in un'ampia porzione della nuvola nel tempo a disposizione per la condensazione (che è dell'ordine della decina di minuti). In fig. 5.3 è mostrata la traiettoria simulata di 30 particelle fluide inizialmente contenute in un quadrato di lato 10 m. Dopo circa 5 minuti le particelle occupano una superficie molto maggiore, di dimensioni paragonabili a quelle dell'intera nuvola.

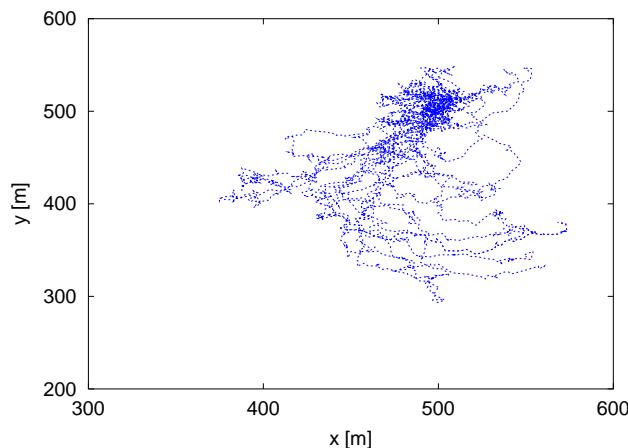


Figura 5.3: Traiettoria calcolata di 30 particelle fluide che evolvono a partire da una condizione iniziale random in una superficie quadrata di $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ al centro della nuvola. Si noti che, dopo 5 minuti, le particelle occupano una superficie di circa $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$, molto più ampia di quella di partenza.

¹Per una descrizione dettagliata del modello di Richardson si veda [30].

5.3 Risultati delle simulazioni

In questo paragrafo sono presentati i risultati delle simulazioni che confermano la presenza di correlazione fra le traiettorie delle goccioline e il valore della soprasaturazione s e il suo ruolo determinante nel fenomeno di ampliamento dello spettro.

5.3.1 Correlazione

La presenza di correlazione è qualitativamente giustificata dalla possibilità di evaporazione: l'esposizione prolungata di una gocciolina a fluttuazioni fortemente negative di s ne può provocare l'evaporazione completa contribuendo alla sottrazione di goccioline dalle zone fortemente sottosature. In fig. 5.4 è mostrata la distribuzione spaziale delle goccioline che indica la concentrazione delle stesse nelle zone caratterizzate da valori positivi di soprasaturazione.

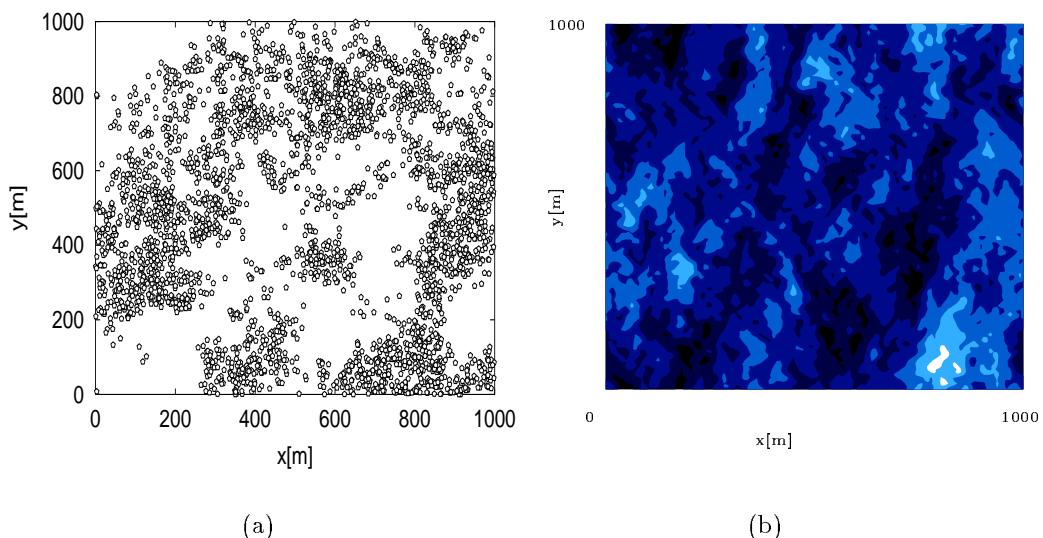


Figura 5.4: (a) Distribuzione spaziale delle goccioline; (b) distribuzione spaziale di soprasaturazione, in bianco sono mostrate le zone soprasature, in blu quelle sottosature. Si noti la forte correlazione fra la soprasaturazione e la distribuzione spaziale delle goccioline che risultano preferenzialmente concentrate nelle zone soprasature.

L'evaporazione delle goccioline costituisce dunque un meccanismo di selezione.

ne delle fluttuazioni sperimentate dalle particelle che risultano superiori a quelle previste dalla statistica euleriana. In fig. 5.5 sono mostrate per tre diversi valori del parametro τ_s , le PDF dei valori di soprasaturazione assunti su tutti i punti del reticolo in rosso (PDF *euleriane*) e le PDF dei valori di soprasaturazione sperimentati dalle particelle in nero (PDF *lagrangiane*). Le PDF lagrangiane sono spostate verso i valori positivi di soprasaturazione e confermano qualitativamente il meccanismo di selezione sopra descritto.

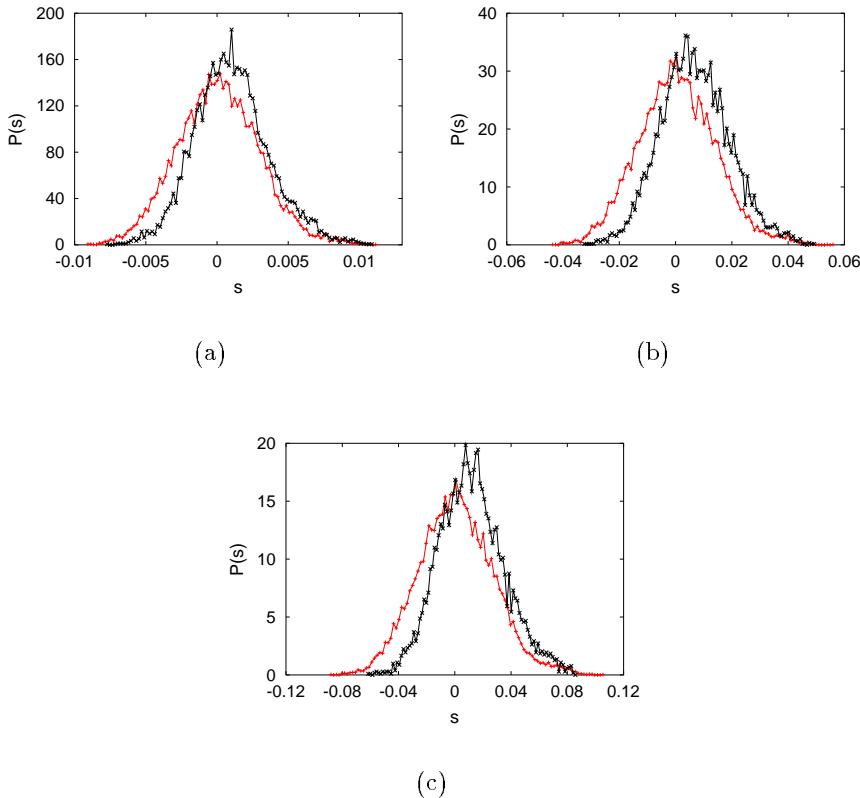


Figura 5.5: Distribuzione lagrangiana (in rosso) ed euleriana (in nero) dei valori di soprasaturazione s calcolate per (a) $\tau_s = 5$ s, (b) $\tau_s = 25$ s e (c) $\tau_s = 50$ s. Si noti come la distribuzione lagrangiana in ognuno dei tre casi spostata verso i valori positivi.

Per valutare più precisamente l'entità della correlazione abbiamo calcolato istante per istante il valor medio delle PDF lagrangiane mostrate in fig. 5.5 Il valor medio lagrangiano di soprasaturazione è definito a pag. 66 dall'integrale:

$$\langle s \rangle_{lag}(t) = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, t) \left(\int_0^{\infty} P(\mathbf{x}, q, t) dq \right) \quad (5.2)$$

in cui $\int_0^{\infty} P(\mathbf{x}, q, t) dq \equiv P(\mathbf{x}, t)$. Se la densità di probabilità di presenza di una particella nel punto \mathbf{x} fosse indipendente dal valore di soprasaturazione in quel punto, il risultato dell'integrazione (5.2) dovrebbe coincidere con l'integrale del campo $s(\mathbf{x}, t)$ su tutto lo spazio, e il valor medio lagrangiano $\langle s \rangle_{lag}$ dovrebbe quindi approssimare quello euleriano che abbiamo fissato a zero. Dai risultati delle simulazioni numeriche mostrati in fig. 5.6 si ottiene al contrario che il valor medio lagrangiano risulta strettamente positivo, dato che ancora una volta conferma la presenza di correlazione. Si noti che l'entità del valor medio efficace cresce aumentando il valore di τ_s .

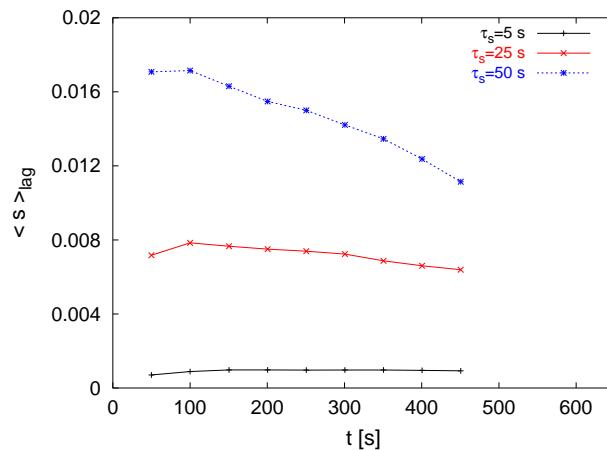


Figura 5.6: Valor medio lagrangiano della soprasaturazione calcolato per $\tau_s = 5$ s (in nero), $\tau_s = 25$ s (in rosso) e $\tau_s = 50$ s (in blu). Si noti che tutte e tre le curve sono strettamente positive, con valori superiori per τ_s superiore.

5.3.2 Ampliamento dello spettro

Le simulazioni effettuate indicano la presenza di un duplice effetto della correlazione sullo spettro delle dimensioni delle goccioline:

1. presenza di condensazione anche in condizioni di soprasaturazione media (euleriana) nulla;

2. ampliamento dello spettro.

I risultati relativi al primo punto sono strettamente legati alla positività del valor medio lagrangiano della soprasaturazione. Il raggio medio $\langle r \rangle$ delle goccioline ha infatti la possibilità di crescere nonostante l'ambiente sia saturo. In fig. 5.7 è mostrato il risultato delle simulazioni per l'evoluzione temporale di $\langle r^2 \rangle$. Si osserva l'andamento lineare classico (3.25), in cui al valor medio euleriano (nullo) si sostituisce quello lagrangiano.

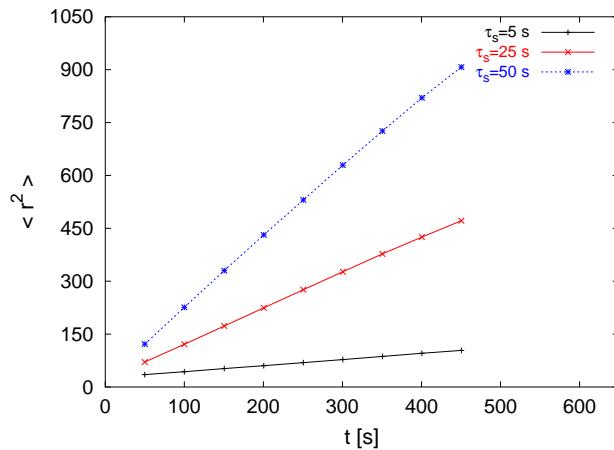


Figura 5.7: Valor medio del quadrato del raggio calcolato per $\tau_s = 5$ s (in nero), $\tau_s = 25$ s (in rosso) e $\tau_s = 50$ s (in blu). Si noti l'andamento lineare con pendenza pari a $2A_3\langle s \rangle_{lag}$.

Il secondo effetto della correlazione fra le traiettorie lagrangiane e il valore di soprasaturazione è l'ampliamento dello spettro delle dimensioni delle goccioline. Esso risulta tanto più rapido quanto più intense sono le fluttuazioni di soprasaturazione. Come mostrato dai risultati delle simulazioni presentati al § 5.3.1, l'intensità di tali fluttuazioni è determinata dal valore del tempo di assorbimento τ_s . In fig. 5.8 osserviamo l'evoluzione temporale della deviazione standard della distribuzione $P(R^2, t)$:

$$Var(R^2) = \sqrt{\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2}.$$

Ricordiamo che la previsione classica è di una deviazione standard costante, pari a quella iniziale, mentre i modelli stocastici temporali prevedono un andamento della deviazione proporzionale alla radice del tempo. L'andamento mostrato in

fig. 5.8 è di tipo lineare e indica quindi un ampliamento dello spettro più veloce sia della previsione classica sia della previsione stocastica.

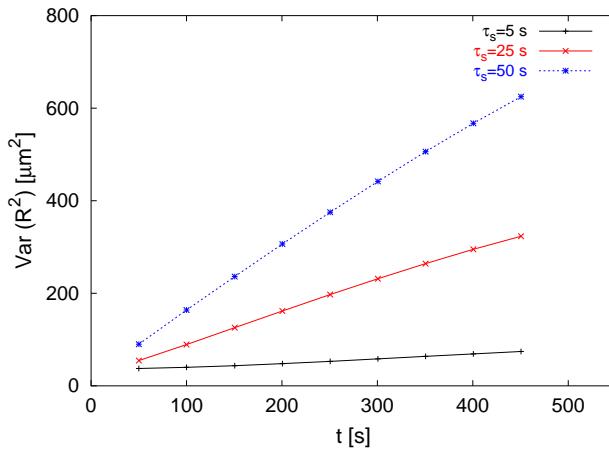


Figura 5.8: Andamento della varianza della distribuzione $P(R^2, t)$ calcolata per $\tau_s = 5$ s (in nero), $\tau_s = 25$ s (in rosso) e $\tau_s = 50$ s (in blu).

In fig. 5.9 è mostrato il risultato delle simulazioni per lo spettro di dimensioni delle goccioline. Come si può vedere dal confronto fra le fig. 5.9(a), 5.9(b), 5.9(c), l'ampliamento dello spettro risulta più rapido in corrispondenza di valori superiori del parametro τ_s . In particolare dopo 450 s si ha rispettivamente per $\tau_s = 5$ s, 25 s e 50 s una percentuale di goccioline che superano i 20 μm pari a 0.2 %, 54 % e 79 %. Nella prima simulazione è necessario aspettare circa 20 minuti affinché la percentuale di goccioline che supera i 20 μm raggiunga il 10 %.

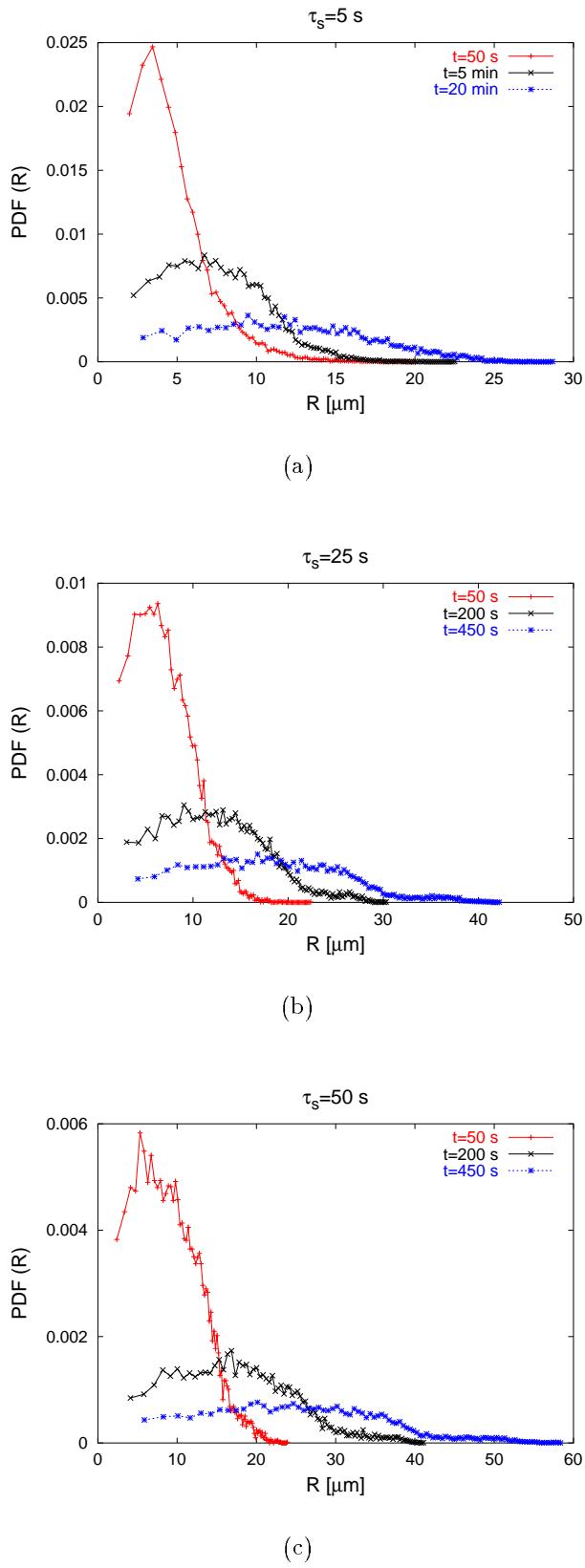


Figura 5.9: Ampliamento dello spettro calcolato per (a) $\tau_s=5 \text{ s}$; (b) $\tau_s=25 \text{ s}$; (c) $\tau_s=50 \text{ s}$.

Appendice A

Codice pseudospettrale

In questa appendice intendiamo fornire i dettagli dei metodi di integrazione sfruttati dal codice spettrale utilizzato. In particolare descriviamo la discretizzazione spaziale e temporale dei campi di velocità e soprasaturazione in 2D e delle quantità lagrangiane (traiettorie e raggi delle particelle). Le equazioni di evoluzione dei campi sono integrate in tre fasi successive. Nella prima fase si integrano esattamente i termini viscoso e diffusivo. Nella seconda fase tralasciando il termine di forzante si calcola il termine avvettivo sfruttando il metodo pseudospettrale e si applica quindi lo schema di integrazione temporale di Runge-Kutta. Infine per il campo di velocità si integra la forzante schematizzata da un processo stocastico gaussiano δ -correlato nel tempo mentre per il campo di soprasaturazione, come vedremo, la forzante è inclusa nel termine avvettivo e nel termine diffusivo. Le equazioni di evoluzione delle quantità lagrangiane sono invece integrate con il metodo di Eulero.

Discuteremo, inoltre, i problemi di stabilità che possono sorgere e i metodi di *dealiasing* per risolverli.

A.1 Discretizzazione spaziale e FFT

Per descrivere la discretizzazione dei campi di velocità e di soprasaturazione, consideriamo per semplicità un'unica componente $u(x)$ del campo di velocità.

Nel seguito consideriamo un dominio spaziale non limitato, che corrisponde all'adozione di condizioni al contorno periodiche in quanto siamo interessati alla simulazione di turbolenza omogenea e isotropa. Non ci occupiamo quindi del

comportamento dei campi vicino ai bordi del dominio spaziale. Tale assunzione riduce gli errori computazionali dovuti alla discretizzazione spaziale.

Analiticamente è possibile considerare la trasformata di Fourier $\hat{u}(k)$ della funzione $u(x)$:

$$\mathcal{F}u(x) = \hat{u}(k) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx, \in \mathbf{C}.$$

La trasformata di Fourier inversa di $\hat{u}(k)$ è definita da:

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(k) = u(x) = C' \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \hat{u}(k), \in \mathbf{C}$$

In cui le costanti C e C' soddisfano la relazione $CC' = 1/(2\pi)$ conseguenza della condizione $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id$. Scegliamo per esempio $C = 1/(2\pi)$, $C' = 1$.

Numericamente è evidentemente necessario limitare il dominio di definizione del campo $u(x)$ e discretizzarlo in modo da ridurre la conoscenza del campo alla conoscenza del numero finito di valori assunti da u nei punti del reticolo costruito, reali o complessi a seconda della natura della funzione u . Il dominio spaziale sia, per esempio $(0, L)$, discretizzato in N intervalli di lunghezza $\Delta x = L/N$, che definiscono una griglia di N punti $x_j = j\Delta x$, con $j = 0, \dots, N - 1$. Lo spazio di Fourier risulta in tal modo anch'esso discretizzato in una griglia di N punti $k_j = j(2\pi/L)$. La trasformata di Fourier nello spazio discreto è:

$$\hat{u}_k \equiv \hat{u}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \in \mathbf{C} \quad (\text{A.1})$$

$$u_n \equiv u(x_n) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \in \mathbf{C} \quad (\text{A.2})$$

in cui le costanti C e C' sono state scelte arbitrariamente in accordo con la condizione di normalizzazione $CC' = 1/N$ diretta conseguenza della condizione $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id$. È opportuno ricordare la relazione nota come *diseguaglianza di Parseval* che, nel caso discreto, assume la forma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}_k|^2 \quad (\text{A.3})$$

Poiché $u(x)$ rappresenta una velocità, dobbiamo evidentemente imporre che il risultato dell'operazione di antitrasformata discreta (A.2) sia reale. Tale condizione corrisponde a un vincolo sulle componenti di Fourier \hat{u}_k :

$$\hat{u}(-k) = \hat{u}^*(k) \quad (\text{A.4})$$

Il vincolo (A.4) riduce a $\frac{N}{2} - 1$ il numero di componenti complesse indipendenti, con l'aggiunta delle due componenti reali:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= \bar{u} \in \mathbf{R} \\ \hat{u}_N &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n u_n \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nel problema unidimensionale si hanno quindi $2(N/2 - 1) + 2 = N$ componenti reali indipendenti. Il calcolo delle N componenti di Fourier u_k associate al campo u richiede l'utilizzo di N cicli di N passi per un totale di N^2 operazioni. Sono oggi disponibili numerose versioni [25] di un algoritmo chiamato *Fast Fourier Transform* (FFT), che calcola le trasformate di Fourier in un numero di operazioni proporzionale a $N \log N$. Il risparmio di tempo che ne risulta è molto vantaggioso soprattutto ad alte risoluzioni.

A.2 Discretizzazione temporale

Esistono diversi metodi di integrazione temporale discreta che si differenziano per la precisione e per il tempo impiegato. Analizziamo nel dettaglio i due schemi di integrazione temporale che utilizziamo per la risoluzione numerica delle equazioni (4.6) che definiscono il modello turbolento di condensazione.

A.2.1 Metodo di Eulero

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t) \quad (\text{A.6})$$

L'analisi numerica dell'equazione differenziale (A.6) richiede evidentemente la limitazione del dominio temporale di interesse a un intervallo finito, che chiameremo $(0, T)$. Consideriamo la discretizzazione del dominio $(0, T)$ in N intervalli $\delta t \equiv T/N$. Il valore della funzione agli istanti $n\delta t$ con $n = 0, \dots, N$ è determinato analiticamente dalla soluzione dell'equazione differenziale (A.6) unita a una condizione iniziale $x(0) = x_0$, ma si può ottenere attraverso la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned} x(\delta t) &\approx x_0 + F(x(0), 0)\delta t \\ x(2\delta t) &\approx x(\delta t) + F(x(\delta t), \delta t)\delta t \\ &\dots \\ x(t + \delta t) &\approx x(t) + F(x(t), t)\delta t \end{aligned} \tag{A.7}$$

Come illustrato in fig. A.1 lo schema di integrazione temporale (A.7) coincide con l'approssimazione della secante σ che unisce il punto $x(t)$ al punto $x(t + \delta t)$ con la tangente τ alla curva $x(t')$ nel punto $t' = t$. La retta secante tende alla retta tangente per $\delta t \rightarrow 0$ (assumendo che la funzione $x(t')$ sia regolare), e l'algoritmo diventa progressivamente più preciso al diminuire del valore di δt .

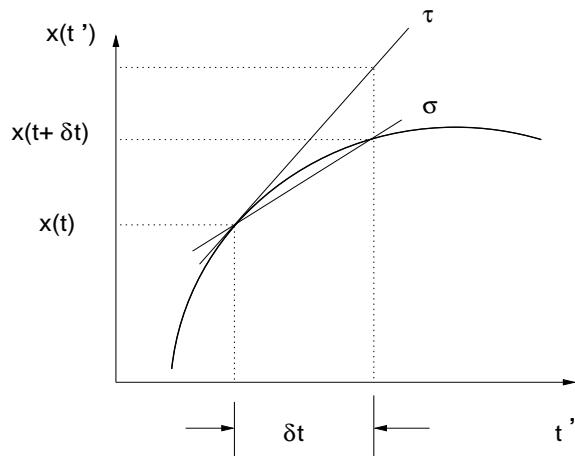


Figura A.1: Rappresentazione dell'approssimazione assunta nello schema di integrazione di Eulero.

Si può dimostrare che l'errore che si commette sfruttando il metodo di integrazione descritto (che chiameremo integrazione *alla Eulero*) è proporzionale all'intervallo discreto δt cioè è un'approssimazione al prim'ordine. È sufficiente infatti considerare lo sviluppo in serie della funzione $x(t)$ a partire dal punto t , e osservare che l'approssimazione che si adotta nello schema di integrazione alla Eulero è il troncamento della serie al prim'ordine:

$$x(t + \delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dt^n} \Big|_t \delta t^n = x(t) + \dot{x}(t)\delta t + O(\delta t^2) \quad (\text{A.8})$$

A.2.2 Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine

Consideriamo nuovamente il problema differenziale

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \quad (\text{A.9})$$

con la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Esistono metodi di integrazione numerica più precisi dell'integrazione alla Eulero, che considerano più termini dello sviluppo in serie (A.8) della funzione incognita $x(t)$. Esponiamo in particolare il metodo di integrazione di Runge-Kutta di ordine 2 sfruttato dal codice per l'integrazione numerica delle equazioni di Navier-Stokes e dello scalare passivo s . Consideriamo l'approssimazione della funzione $x(t)$ di ordine 2:

$$\begin{aligned} x(t + \delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\delta t + \ddot{x}(t)\frac{\delta t^2}{2} + O(\delta t^3) = \\ &\approx x(t) + \delta t \left(F[x(t)] + \frac{1}{2} \delta t \left[\frac{\partial F}{\partial x} F \right]_{x(t)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

in cui si è utilizzata l'espressione della derivata seconda $\ddot{x} = F(\partial F / \partial x)$. Il metodo di Runge-Kutta di ordine 2 calcola il valore di tale derivata utilizzando un'ulteriore suddivisione dell'intervallo δt in due intervalli di dimensione $\delta t/2$. Osserviamo che da una prima integrazione alla Eulero della funzione $x(t)$ con passo $\delta t/2$ si ottiene:

$$\delta x = x(t + \frac{\delta t}{2}) - x(t) \approx F(x(t)) \frac{\delta t}{2} \quad (\text{A.11})$$

Conoscendo dalla (A.11) il valore (approssimato al prim'ordine) dell'incremento δx della funzione $x(t)$ dopo il primo passo, possiamo applicare nuovamente l'integrazione alla Eulero alla funzione $F(x(t))$:

$$F(x + \delta x) \approx F(x) + \frac{dF}{dx} \Big|_x \delta x \equiv F(x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x(t)} F(x(t)) \frac{\delta t}{2} \quad (\text{A.12})$$

La stima al prim'ordine della funzione F nel punto $x + \delta x$ corrisponde all'espressione che compare a secondo membro nell'equazione (A.10), e fornisce quindi lo schema di integrazione temporale completo:

$$x(t + \delta t) = x(t) + \delta t F[x(t) + \frac{1}{2} \delta t F(x(t))] \quad (\text{A.13})$$

A.3 Metodo pseudospettrale e discretizzazione temporale

Il metodo *pseudospettrale* sfrutta i vantaggi offerti dalla formulazione delle equazioni in spazio di Fourier per calcolare le derivate come semplici prodotti:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \frac{d}{dx} &= ik_x, \\ \mathcal{F} \frac{d}{dy} &= ik_y, \end{aligned}$$

in cui i è l'unità immaginaria. Dalla teoria della trasformata di Fourier [?] è noto che l'operazione prodotto corrisponde in spazio di Fourier a una convoluzione che è definita da un integrale:

$$\mathcal{F}(f(x) \cdot g(x))(k) \equiv (\hat{f} * \hat{g})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) \hat{g}(k - p) dp$$

Tale operazione risulta numericamente dispendiosa e si preferisce quindi calcolare i prodotti in spazio fisico per poi ritornare in spazio di Fourier attraverso la FFT discreta introdotta al § A.1.

Il sistema di equazioni accoppiate (4.6) descritto nel capitolo 4 definisce il modello di condensazione turbolento che analizziamo qui numericamente. Riportiamo le equazioni di tale modello integrate in 2D dal codice pseudospettrale

e analizziamo lo schema completo di integrazione applicato per ognuna di esse. Le prime due sono integrate con il metodo di Runge-Kutta di ordine 2 (introdotto al § A.2.2) sfruttando il metodo pseudospettrale per i termini non lineari e l'integrazione esatta dei termini viscoso e diffusivo; si differenziano unicamente per l'integrazione del termine di forzante. Le ultime due sono integrate con il metodo di Eulero come descritto al § A.2.1.

Integrazione delle equazioni per il campo di velocità e per la soprasaturazione

Consideriamo l'equazione per la vorticità $\omega(\mathbf{x}, t)$ che segue dalle equazioni di Navier-Stokes in 2D per il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$, discussa al § 2.3:

$$\partial_t \omega(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) = \nu \partial^2 \omega(\mathbf{x}, t) + f_\omega(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.14})$$

Ricordiamo che il campo di velocità si ottiene a partire dalla conoscenza della funzione di corrente ψ :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= -\partial_y \psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \hat{u}(\mathbf{k}, t) = ik_y \frac{\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \\ w(\mathbf{x}, t) &= \partial_x \psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \hat{w}(\mathbf{k}, t) = -ik_x \frac{\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

in cui si è tenuto conto della relazione $\omega(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t)$ che corrisponde in spazio di Fourier a: $\hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = -k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$.

L'integrazione dell'equazione (A.14) si sviluppa in tre fasi. Consideriamo innanzitutto l'integrazione del termine viscoso $\nu \nabla^2 \omega$, in assenza del termine non lineare e della forzante. Aggiungiamo poi il termine non lineare $\mathbf{v} \cdot \nabla \omega$ calcolato con il metodo pseudospettrale. Infine integriamo il termine di forzante f_ω che schematizziamo come un campo stocastico gaussiano δ -correlato.

INTEGRAZIONE DEL TERMINE VISCOSO:

Consideriamo la formulazione dell'equazione (A.14) in spazio di Fourier:

$$\partial_t \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) + \mathcal{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t)] = -\nu k^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) + \hat{f}_\omega(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A.16})$$

In assenza del termine avvettivo e della forzante l'equazione (A.16) si risolve esattamente e la soluzione è:

$$\hat{\omega}_0(\mathbf{k}, t) = \omega_0 e^{-\nu k^2 t} \quad (\text{A.17})$$

Per tenere conto dell'integrazione esatta del termine diffusivo consideriamo una soluzione dell'equazione (A.16) del tipo:

$$\hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{-\nu k^2 t} \Rightarrow \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) = \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{+\nu k^2 t} \quad (\text{A.18})$$

Sostituendo la soluzione (A.18) nell'equazione di evoluzione (A.16), trascurando per il momento la forzante f_ω , otteniamo:

$$\partial_t \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) = -\mathcal{F}[\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \tilde{\omega}(\mathbf{x}, t)]. \quad (\text{A.19})$$

In analogia con quanto descritto al § A.1 per funzioni di una sola variabile spaziale, discretizziamo spazialmente i campi che, essendo in 2D, diventano matrici: indichiamo con $\hat{\omega}_{hj}(t)$ (\mathbf{v}_{hj}) e ω_{ab} (\mathbf{v}_{ab}) i valori della vorticità (velocità) rispettivamente nei punti (k_h, k_j) del reticolo in spazio di Fourier e (x_a, y_b) del reticolo in spazio fisico. Analogamente con \mathcal{F}_{hj} indichiamo il risultato dell'operazione di FFT calcolato nel punto (k_h, k_j) del reticolo in spazio di Fourier.

APPLICAZIONE DEL METODO DI RUNGE-KUTTA DI ORDINE 2

Discretizziamo temporalmente l'equazione (A.19) nei due passi indicati dal metodo di Runge-Kutta di ordine 2 (si veda § A.2.2). Sostituendo all'equazione (A.9) l'equazione di evoluzione della vorticità (A.19) e tenendo conto della relazione (A.18) otteniamo:

Primo passo:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{hj}(t + \frac{dt}{2}) &= \tilde{\omega}_{hj}(t) - \frac{dt}{2} \mathcal{F}_{hj} [\mathbf{v}_{ab}(t) \cdot \nabla \omega_{ab}(t)] \\ \Rightarrow \hat{\omega}_{hj}(t + \frac{dt}{2}) &= e^{-(k_h^2 + k_j^2)\nu \frac{dt}{2}} [\hat{\omega}_{hj}(t) - \frac{dt}{2} \mathcal{F}_{hj}(\mathbf{v}_{ab}(t) \cdot \nabla \omega_{ab}(t))]\end{aligned}$$

Secondo passo:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{hj}(t + dt) &= \tilde{\omega}_{hj}(t) - dt \mathcal{F}_{hj} (\mathbf{v}_{ab}(t + \frac{dt}{2}) \cdot \nabla \omega_{ab}(t + \frac{dt}{2})) \\ \Rightarrow \hat{\omega}_{hj}(t) &= e^{-(k_h^2 + k_j^2)\nu \frac{dt}{2}} [e^{-(k_h^2 + k_j^2)\nu \frac{dt}{2}} \hat{\omega}_{hj}(t) + \\ &\quad - dt \mathcal{F}_{hj} (\mathbf{v}_{ab}(t + \frac{dt}{2}) \cdot \nabla \omega_{ab}(t + \frac{dt}{2}))]\end{aligned}\tag{A.20}$$

Per il calcolo della velocità \mathbf{v} nelle (A.20) si utilizzano le versioni discrete delle equazioni (A.15) che forniscono le componenti della velocità $\hat{\mathbf{v}}_{hj}$ a partire dal valore della vorticità in spazio di Fourier. Si passa in spazio fisico calcolando la FFT inversa della velocità e delle derivate della vorticità $\nabla \hat{\omega}_{hj} = (ik_x \hat{\omega}_{hj}, ik_y \hat{\omega}_{hj})$ per calcolare il prodotto $(\mathbf{v}_{ab}(t) \cdot \nabla \omega_{ab}(t))$. Si ritorna infine in spazio di Fourier applicando la FFT al termine non lineare calcolato in spazio fisico in accordo con il metodo pseudospettrale.

FORCING

L'ultima fase dell'integrazione temporale della (A.14) prevede l'introduzione della forzante f_ω (*forcing*). Esistono diversi modelli numerici per riprodurre l'effetto della forza specifica che compare nelle equazioni di Navier-Stokes (2.1a). Modellizziamo la forzante del campo di velocità come un rumore bianco:

$$\begin{aligned}\langle f_\omega(t) f_\omega(t') \rangle &= K \delta(t - t'); \\ \langle f_\omega(t) \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Inseriamo la forzante f_ω nello schema temporale:

$$\frac{d\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{dt} = f_\omega(t)\tag{A.21}$$

Come discusso al § 2.6.1 l'equazione (A.21) è di tipo diffusivo e produce una PDF della vorticità gaussiana, con media costante e varianza proporzionale al tempo

$\sigma^2(\hat{\omega}) = K^2(t - t_0)$. Da questa osservazione segue una stima della vorticità $\hat{\omega}$ al tempo $t + \delta t$ a partire dalla conoscenza di $\hat{\omega}(t)$:

$$\hat{\omega}(\mathbf{k}, t + \delta t) \approx \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) + \sqrt{\sigma^2} = \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) + K\sqrt{\delta t}$$

La stima della vorticità costituisce una giustificazione intuitiva dello schema di integrazione della forzante utilizzato nel codice:

$$\hat{\omega}(\mathbf{k}, t + \delta t) \equiv \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) + C\sqrt{\delta t} \quad (\text{A.22})$$

in cui C è generato in maniera casuale in accordo con la densità di probabilità gaussiana della forzante f_ω .

Consideriamo l'equazione di trasporto (4.2) per lo scalare passivo s (soprasaturazione) discussa a pag. 57 e la sua versione in spazio di Fourier:

$$\partial_t s(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla s(\mathbf{x}, t) = A_1 w(\mathbf{x}, t) - \frac{s(\mathbf{x}, t)}{\tau_s} + D \partial^2 s(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.23})$$

$$\partial_t \hat{s}(\mathbf{k}, t) + \mathcal{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla s(\mathbf{x}, t)] = A_1 \hat{w}(\mathbf{k}, t) - \frac{\hat{s}(\mathbf{k}, t)}{\tau_s} - D k^2 \hat{s}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A.24})$$

L'integrazione temporale dell'equazione (A.23) riproduce le stesse fasi descritte per l'integrazione dell'equazione per la vorticità (A.14) con le seguenti differenze:

- Nella prima fase si include nell'integrazione esatta sia il termine diffusivo sia il termine $-\hat{s}(\mathbf{k}, t)/\tau_s$. Si sceglie quindi come soluzione dell'equazione (A.24) un campo del tipo:

$$\hat{s}(\mathbf{k}, t) = e^{-(k^2 + \frac{1}{\tau_s})t}$$

- Nella seconda fase si include nel calcolo del prodotto con metodo pseudospettrale sia il termine avvettivo sia il termine $A_1 w \equiv A_1 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ in cui $\hat{\mathbf{y}}$ è identificato con il versore spaziale nella direzione verticale. Si calcola infatti il prodotto $\mathbf{v} \cdot [\nabla s(\mathbf{x}, t) - A_1 \hat{\mathbf{y}}]$. La terza fase risulta quindi inutile perché il forcing è già stato incluso nel termine avvettivo.

Integrazione temporale delle equazioni lagrangiane per la traiettoria e il raggio delle goccioline

Consideriamo le equazioni di evoluzione delle quantità lagrangiane posizione e raggio delle N goccioline schematizzate come particelle fluide come discusso a pag. 58:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{X}_i(t)}{dt} &= \mathbf{v}(\mathbf{X}_i(t), t) + \sqrt{2D}\boldsymbol{\eta}(t) \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{dR_i^2(t)}{dt} &= 2A_3(\bar{s} + s(\mathbf{X}_i(t), t)) \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{A.25}$$

in cui $\boldsymbol{\eta}$ è il rumore bianco utile per la descrizione del processo diffusivo a cui vanno incontro le goccioline. Il metodo di integrazione del rumore gaussiano $\boldsymbol{\eta}$ è lo stesso descritto dall'equazione (A.22) per la forzante random f_ω . Si ricorda che l'equazione di condensazione per il raggio delle goccioline è scritta in approssimazione quasi-statica, discussa a pag. 58.

Il codice integra le equazioni lagrangiane (A.25) al prim'ordine (schema di integrazione alla Eulero, § A.2.1), a partire dalla conoscenza dei campi di velocità e soprasaturazione integrati precedentemente:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i(t + \delta t) &= \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{v}_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)\delta t + D\mathbf{C} \quad i = 1, \dots, N \\ R_i^2(t + \delta t) &= R_i^2(t) + 2A_3(\bar{s} + s_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)) \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{A.26}$$

Con $\mathbf{v}_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)$ e $s_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)$ indichiamo i valori dei campi \mathbf{v} ed s interpolati nel punto $\mathbf{X}_i(t)$ che non appartiene necessariamente al reticolo. Tale interpolazione consiste nella media pesata dei valori assunti dai campi nei quattro punti del reticolo più vicini al punto $\mathbf{X}_i(t)$.

A.4 Stabilità e dealiasing

Nelle equazioni (A.14) e (A.23) i termini avvettivi sono costituiti da prodotti. Tali operazioni possono generare modi al di fuori dei modi risolti¹ che vengono proiettati (aliased) in maniera casuale e quindi incontrollabile su modi risolti.

¹Si consideri per esempio il prodotto $\sin x \cos x = (1/2) \sin 2x$. Tale operazione coinvolge il prodotto di due funzioni caratterizzate da $k=1$ e produce un modo $k=2$.

Un esempio di aliasing *naturale* è il funzionamento dell'occhio umano quando osserva un disco che ruota: se il disco ruota con frequenza superiore a 24 Hz l'occhio umano lo *vede* ruotare con frequenza minore.

A bassa risoluzione tipicamente l'energia associata ai modi aliased è molto elevata e questo provoca problemi numerici a cui si attribuisce genericamente il nome di instabilità. Il problema della valutazione delle instabilità numeriche è molto complesso. Esistono criteri validi in determinate situazioni fra cui citiamo il criterio di Courant. Nel codice adottiamo un criterio di stabilizzazione severo che corrisponde qualitativamente a scegliere un passo temporale δt minore del tempo minimo impiegato da una particella fluida per percorrere una distanza pari al passo griglia δx :

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{U_{max}}$$

Bibliografia

- [1] J. ZINN-JUSTIN: *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford Science Publ., Oxford, 1989).
- [2] J. T. BARTLETT E P. R. JONAS: On the Dispersion of the Sizes of Droplets growing by Condensation in Turbulent Clouds. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **98**, 150-164 (1972).
- [3] G. K. BATCHELOR: *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).
- [4] P. BILLINGSLEY: *Probability and Measure* (J. Wiley, 1995).
- [5] R.C. BINDER: *Fluid Mechanics* (Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973).
- [6] R.M. DUDLEY: *Real analysis and Probability* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [7] G. FALKOVICH, K. GAWEDZKI E M. VERGASSOLA: Particles and Fields in Fluid Turbulence. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 913-975 (2001).
- [8] M. FARGE: Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24**, 395-407 (1992).
- [9] W. FELLER: *An Introduction to Probability Theory and its Application* (Wiley, New York, 1974).
- [10] U. FRISCH: *Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

- [11] U. FRISCH, A. MAZZINO, A. NOULLEZ E M. VERGASSOLA: Lagrangian method for multiple correlations in passive scalar advection. *Phys. Fluids* **11**, 2178-2186 (1999).
- [12] J. E. MARSDEN E T. S. RATIU: *Introduction to Mechanics and Symmetry* (Text in Applied Mathematics, vol. 17, Springer Verlag, 2002).
- [13] C. W. GARDINER: *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, in Springer Series in Synergetics, H. HAKEN ed. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985).
- [14] R. A. HOUZE: *Cloud Dynamics*, in International Geophysics Series (Academic Press, 1994).
- [15] P. R. JONAS: Turbulence and Cloud microphysics. *Atmos. Res.* **40**, 283-306 (1996).
- [16] V. I. KHVOROSTYANOV E J. A. CURRY: Toward the Theory of Stochastic Condensation in Clouds. Part I: A General Kinetic Equation. *J. Atmos. Sci.* **56**, 3985-3996 (1999).
- [17] V. I. KHVOROSTYANOV E J. A. CURRY: Toward the Theory of Stochastic Condensation in Clouds. Part II: Analytical Solutions of the Gamma-Distribution Type. *J. Atmos. Sci.* **56**, 3997-4013 (1999).
- [18] A. N. KOLMOGOROV E S. V. FOMIN: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale* (Edizioni Mir, Mosca, 1980).
- [19] R. H. KRAICHNAN: Inertial range in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417-1423 (1967).
- [20] M. KULMALA, U. RNNIK, E. L. ZAPADINSKY E C. F. CLEMENT: The Effect of Saturation Fluctuations on Droplet Growth. *J. Aerosol Sci.* **28**, 1395-1409 (1997).
- [21] L. D. LANDAU E E. M. LIFSHITZ: *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987).
- [22] I. J. LEE E H. R. PRUPPACHER: A Comparative Study of the Growth of Cloud Droplets by Condensation Using an air Parcel Model with and without Entrainment. *Pure Appl. Geophys.*, **115**, 523-545(1977).

- [23] M. LESIEUR: *Turbulence in Fluids*. (Kluwer, Dordrecht, 1990).
- [24] E. A. NOVIKOV: Functionals and the Random-force Method in Turbulence Theory. *Sov. Phys. JETP* **47**, 1919-1926 (1965).
- [25] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING E B. P. FLANNERY: *Numerical Recipes in Fortran 90 : the Art of Parallel Scientific Computing*. Volume2 of Fortran Numerical Recipes (Cambridge University Press, 1996)
- [26] H. R. PRUPPACHER E J. D. KLETT: *Microphysics of Clouds and Precipitation* (Kluwer Academic Publishers, 1996).
- [27] H. RISKEN: *The Fokker–Planck Equation, Methods of Solution and Applications*, in Springer Series in Synergetics, H. HAKEN ed. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989).
- [28] L. SCHWARTZ: *Théorie des Distributions* (Hermann, Paris, 1966).
- [29] R. A. SHAW: Particle-Turbulence Interactions in Atmospheric Clouds. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **35**, 183-227 (2003).
- [30] B. I. SHRAIMAN E E. D. SIGGIA: Scalar Turbulence. *Nature* **405**, 639-646 (2000).
- [31] P. TABELING: Two-dimensional Turbulence: a physicist approach. *Physics Reports* **362**, 1-62 (2002).
- [32] A. G. SVESHNIKOV E A. N. TIKHONOV: *The Theory of Functions of a Complex Variable* (Ed. Mir, Mosca, 1973).
- [33] J. W. TELFORD: Clouds with Turbulence; the Role of Entrainment. *Atmos. Res.* **40**, 261-282 (1996).
- [34] P. A. VAILLANCOURT, M. K. YAU E W. W. GRABOWSKI: Microscopic Approach to Cloud Droplet Growth by Condensation. Part I: Model Description and Results without Turbulence. *J. Atmos. Sci.* **58**, 1945-64 (2001).
- [35] P. A. VAILLANCOURT, M. K. YAU, P. BARTELLO E W. W. GRABOWSKI: Microscopic Approach to Cloud Droplet Growth by Condensation. Part II: Turbulence, Clustering and Condensational Growth. *J. Atmos. Sci.* **59**, 3421-35 (2002).

Elenco delle figure

1	(a) Misure sperimentali dello spettro di dimensioni delle goccioline; (b) spettro delle dimensioni delle gocce previsto dal modello classico di Lee e Pruppacher del 1972 [22].	v
2	Distribuzioni di probabilità euleriana (in rosso) e lagrangiana (in nero) della soprasaturazione al tempo $t=500$ s. Si noti come la distribuzione lagrangiana sia traslata rispetto a quella euleriana: i valori di soprasaturazione sperimentati dalle goccioline sono superiori a quelli previsti dalla statistica puntuale.	x
3	(a) Distribuzione spaziale delle goccioline; (b) distribuzione spaziale di soprasaturazione, in bianco sono mostrate le zone soprasature, in blu quelle sottosature. Si noti la forte correlazione fra la soprasaturazione e la distribuzione spaziale delle goccioline che risultano preferenzialmente concentrate nelle zone soprasature.	xi
4	Spettro delle dimensioni delle goccioline previsto dalla simulazione con $\tau_s = 25$ s: dopo circa 7 minuti una buona parte di goccioline (circa il 45 %) supera un raggio di $20 \mu\text{m}$	xii
5	Evoluzione temporale del raggio medio delle goccioline, calcolata assumendo $\bar{s} = 0$. Il modello turbolento prevede la possibilità di aumento delle dimensioni per condensazione anche in un ambiente in cui il valor medio di soprasaturazione sia nullo, eventualità esclusa dal modello classico.	xii
1.1	Traccia temporale della velocità in un tunnel a vento con $Re = 2720$ in funzione del tempo (misurato in unità di campionamento). Da [10].	1
1.2	Dominio di integrazione D dell'integrale doppio nell'equazione (1.23).	15
2.1	Grafico in scala logaritmica dello spettro di energia del flusso fra due cilindri rotanti con $Re = 1200$ [10].	21
2.2	Esponente di scala previsto dalla K41, schematizzazione dell'andamento sperimentale dell'esponente di scala in un flusso reale.	25

3.1	Schema dell'andamento dell'energia di una gocciolina in fase di nucleazione in funzione del raggio nei due casi $e \leq e_s$ ed $e > e_s$. Si noti che l'aumento del raggio corrisponde a una diminuzione di energia solo in un ambiente soprasaturo per goccioline che superano il raggio critico R_c	42
3.2	Nucleazione eterogenea, le molecole di vapore condensano sulla superficie di una particella solida estranea e formano uno strato d'acqua di forma curva.	42
5.1	Spettro di energia $E(k)$ ottenuto dalle simulazioni effettuate. I parametri caratteristici del campo di velocità sono costanti per tutte le simulazioni. Si noti l'accordo con l'andamento previsto dalla K41 nel range inerziale, che si estende da $k_L \approx 6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ e $k_l \approx 8 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$, dove k_L e k_l sono i numeri d'onda associati rispettivamente alla scala integrale L e alla scala l	72
5.2	Spettro euleriano della soprasaturazione nei tre casi $\tau_s = 5 \text{ s}$ (in rosso), $\tau_s = 25 \text{ s}$ (in nero) e $\tau_s = 50 \text{ s}$ (in blu). Si noti come il valore di τ_s determini l'ampiezza di fluttuazioni dello scalare il cui valor medio risulta comunque nullo.	74
5.3	Traiettoria calcolata di 30 particelle fluide che evolvono a partire da una condizione iniziale random in una superficie quadrata di $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ al centro della nuvola. Si noti che, dopo 5 minuti, le particelle occupano una superficie di circa $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$, molto più ampia di quella di partenza.	75
5.4	(a) Distribuzione spaziale delle goccioline; (b) distribuzione spaziale di soprasaturazione, in bianco sono mostrate le zone soprasature, in blu quelle sottosature. Si noti la forte correlazione fra la soprasaturazione e la distribuzione spaziale delle goccioline che risultano preferenzialmente concentrate nelle zone soprasature.	76
5.5	Distribuzione lagrangiana (in rosso) ed euleriana (in nero) dei valori di soprasaturazione s calcolate per (a) $\tau_s = 5 \text{ s}$, (b) $\tau_s = 25 \text{ s}$ e (c) $\tau_s = 50 \text{ s}$. Si noti come la distribuzione lagrangiana in ognuno dei tre casi spostata verso i valori positivi.	77
5.6	Valor medio lagrangiano della soprasaturazione calcolato per $\tau_s = 5 \text{ s}$ (in nero), $\tau_s = 25 \text{ s}$ (in rosso) e $\tau_s = 50 \text{ s}$ (in blu). Si noti che tutte e tre le curve sono strettamente positive, con valori superiori per τ_s superiore.	78
5.7	Valor medio del quadrato del raggio calcolato per $\tau_s = 5 \text{ s}$ (in nero), $\tau_s = 25 \text{ s}$ (in rosso) e $\tau_s = 50 \text{ s}$ (in blu). Si noti l'andamento lineare con pendenza pari a $2A_3\langle s \rangle_{lag}$	79
5.8	Andamento della varianza della distribuzione $P(R^2, t)$ calcolata per $\tau_s = 5 \text{ s}$ (in nero), $\tau_s = 25 \text{ s}$ (in rosso) e $\tau_s = 50 \text{ s}$ (in blu).	80
5.9	Ampliamento dello spettro calcolato per (a) $\tau_s = 5 \text{ s}$; (b) $\tau_s = 25 \text{ s}$; (c) $\tau_s = 50 \text{ s}$. 81	

A.1 Rappresentazione dell'approssimazione assunta nello schema di integrazione di Eulero	86
---	----

Ringraziamenti

Innanzitutto vorrei ringraziare Roberto Festa, Andrea Mazzino e Antonio Celani per la grande disponibilità e l'interesse che hanno mostrato per questo lavoro e Renzo Collina e Corrado Ratto per il tempo che mi hanno dedicato.

Per i numerosi caffè e per la condivisione di questi mesi ringrazio Andrea B., Lara, Alberto, Marco, Massimiliano, Aldo. Ringrazio Fabrizio per le discussioni (sensate e non) accompagnate da fantasiose varietà di frutta secca, Andrea D. per il sorriso sempre pronto, Luca Federico ed Eliseo per le fondamentali consulenze in fase di consegna.

Ringrazio tutti coloro che mi hanno supportato (e sopportato) al di là del lavoro di tesi, Francesca e Noemi per le montagne di parole che ci diciamo e che ci diremo, Nirmala, Umberto e Camilla e quelli dell'appartamento spagnolo, Olivia, Simona, Nicoletta e tutte le danzerine.

Per il sostegno e la stima che mi hanno saputo dimostrare anche quando ero decisamente sulle nuvole, ringrazio con affetto la mia numerosa, molto numerosa, famiglia.

Infine un ringraziamento particolare a Dario per la sua pazienza impagabile e a Lorenzo, per una quantità di motivi che qui non so elencare.