TP ondes et vibrations : ondes transverses et oscillation paramétrique

1 Les ondes transverses

Une onde est appelée transverse lorsque la vibration s'effectue dans le plan perpendiculaire à l'axe de propagation de l'onde. Nous allons étudier la propagation d'une onde le long d'une corde tendue (Corde de Melde).

1.1 Rappel théorique

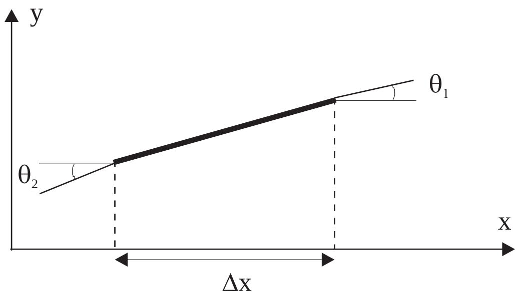

FIG. 1 – Schéma d'une portion de corde vibrant transversalement.

On considère une corde de masse linéaire μ, horizontale au repos. A l'instant t = 0, on donne à une portion de la corde des déplacements et des vitesses transversales.On étudie l'évolution et la propagation de cette déformation au cours du temps. Si T est la tension de la corde, la force transversale agissant sur l'élément de longueur Δx est :

$$F_y = T \sin\theta_1 - T \sin\theta_2.$$

Pour des mouvements de faibles amplitudes on peut confondre sinus et tangente :

$$F_y = T\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2}\right].$$

Un développement au deuxième ordre conduit à

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x$$

L'application du principe fondamental de la dynamique sur la portion Δx donne :

$$F_y = T\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{d^2y}{dt}. \quad (1)$$

y étant une fonction de x et de t, en posant $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la relation (1) prend la forme d'une équation d'onde classique

$$\frac{d^2y(x,t)}{dx^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2y(x,t)}{dt} = 0. \quad (2)$$

Cette équation admet comme solution générale :

$$y(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(x-vt).$$

$f_1(x+vt)$ correspond à un déplacement vers la gauche de la perturbation avec une vitesse v. De même $f_2(x-vt)$ correspond à un déplacement vers la droite. Si $f_1(x)$ correspond à la forme de la corde à l'instant $t=0$, la forme à l'instant t s'obtient en translatant la fonction $f_1(x)$ vers la gauche de la distance vt. La solution à l'instant t dépend donc des conditions initiales et aux limites.

Oscillations forcées sinusoïdales

Dans ce cas, les conditions aux limites sont : $y(0,t)=\sin(\omega t)$ et $y(L,t)=0$ (extrémité fixe).

$$y(x,t) = A\left(\frac{\sin(k(L-x)}{sin(kL)}\right)\sin(\omega t) \quad avec\, k=\frac{\omega}{v}. \tag{3}$$

Soit $\omega_0=\frac{\pi v}{L}$, la pulsation fondamentale de vibration de la corde. Quand ω est un multiple entier de ω_o, la corde présente un système de noeuds immobiles et de ventres d'amplitude infinie. Physiquement cette solution est donc inacceptable. Pour avoir un système plus réaliste, on peut introduire un frottement de type visqueux dans l'équation d'onde (2).

1.2 Manipulation

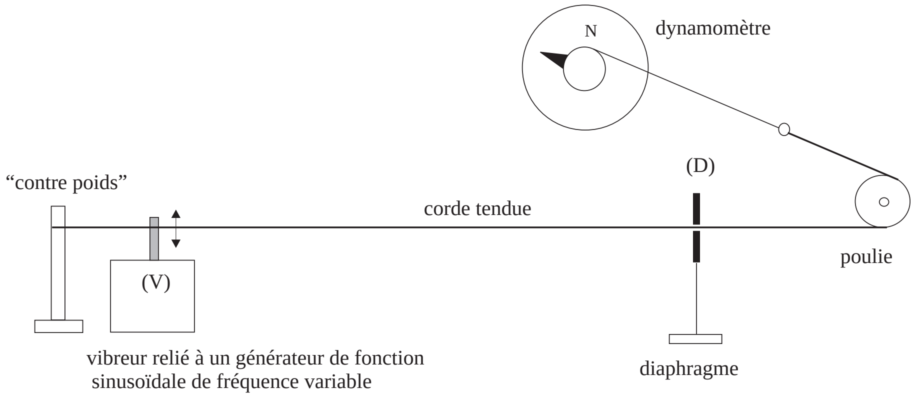

FIG. 2 – Dispositif expérimental pour l'étude des ondes transverses

Installer le dispositif comme indiqué sur la figure 2.
Le contre poids sert à maintenir le vibreur vertical. Vous vérifierez régulièrement sa position.
Le dynamomètre et la poulie sont fixés grâce à des aimants sur le panneau en fer. Le diaphragme en position fermée sert à fixer la longueur L de la corde (distance VD).

Visualisation des modes de vibrations

Fixer la tension de la corde à 2N et le distance L=1,7 m. Le vibreur est pour l'instant éteint. Le mode fondamental de vibration est celui que vous observez lorsque vous perturber la corde en son centre. Il est composé d'un unique fuseau de longueur VD. Afin de connaître sa fréquence de vibration, vous utiliserez le stroboscope.

- Expliquer la démarche et déterminer cette fréquence f_o.
- Exciter ce mode fondamental à l'aide du vibreur. Arranger-vous pour obtenir le maximum d'amplitude. Donner la valeur de la fréquence du vibreur.
- Comment s'y prendre pour observer les différentes harmoniques supérieures ?
- Pourquoi appelle-t-on ce type d'ondes, des ondes stationnaires

L'utilisation du stroboscope permet de visualiser le mouvement de la corde au ralenti.

- Réaliser cette expérience et dessiner les 4 premières harmoniques. Repérer la position des noeuds et des ventres.

Mesure de la longueur d'onde

Fixer la fréquence du vibreur à 50 Hz et chercher la position du diaphragme qui donne n fuseaux d'amplitude maximale afin de remplir le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6
L(cm)						

Utiliser le logiciel Regressi pour représenter le graphique $L = f(n)$ et modéliser la fonction f.

- En déduire une valeur de la longueur d'onde λ .
- En vous aidant de l'équation (3), trouver la relation qui donne la vitesse v de propagation de l'onde en fonction de la fréquence f et la longueur d'onde λ.
- En déduire la valeur de la vitesse.

Influence de la tension de la corde

Pour différentes valeurs de la tension appliquée à la corde (entre 1,5 N et 4 N) compter le nombre n de fuseaux sur une longueur L en réglant celle-ci pour avoir les fuseaux les plus amples ; en déduire la longueur d'onde λ.

T(N)						
n						
L(cm)						

Utiliser le logiciel Regressi pour créer la nouvelle variable λ (m) : longueur d'onde.

Représenter le graphique $\lambda = f(T)$ et modéliser. En déduire une valeur de la masse linéique μ de la corde. Comparer avec la valeur obtenue par pesée. Conclusion.

2 Le botafumeiro, exemple d'oscillateur paramétrique

Un oscillateur paramétrique est un oscillateur dont un des paramètres descriptifs voit sa valeur varier au cours du temps. Un pendule simple peut-être transformé en oscillateur paramétrique : c'est le cas du célèbre " Botafumeiro " de St Jacques de Compostelle. C'est un gigantesque encensoir, suspendu au plafond de la cathédrale de Saint Jacques de Compostelle. Son oscillation permet de diffuser de l'encens dans toute la cathédrale. Sa suspension a la particularité d'être de longueur variable, grâce à un ensemble de cordes tirées à la main par 8 hommes. Le paramètre qui varie est donc la longueur du pendule , (ce paramètre est fixe dans le pendule simple ordinaire).

2.1 Manipulation

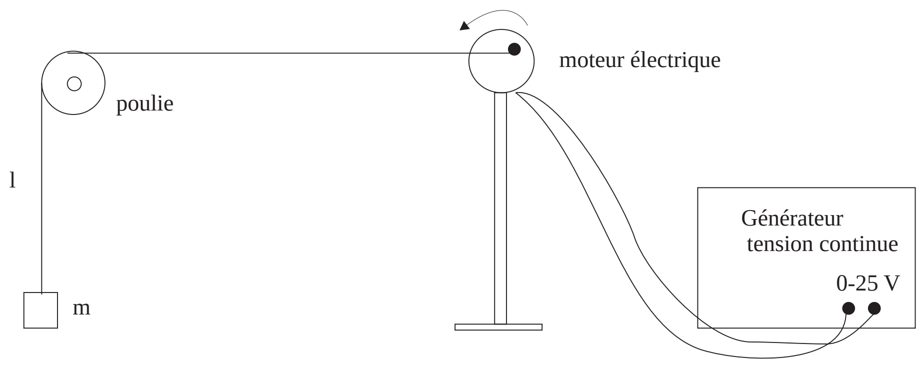

FIG. 3 – Dispositif expérimental du botafumeiro

La vitesse de rotation du moteur électrique dépend de la tension continue qu'on lui applique. Vous allez tout d'abord étalonner le moteur.

- Mesurer la fréquence f de rotation du moteur pour des tensions U allant de 0.5V jusque 5V et tracer le graphe $f = f(U)$. Vous ferez attention à ne jamais dépasser les 5V.
- Réaliser le montage décrit sur la figure 3 et régler la longueur l à 30 cm. Vous utiliserez une masse de 50g.
- Le moteur étant arrêté, mesurer la fréquence d'oscillation f_0 du pendule.

- Régler la tension de telle manière à faire tourner le moteur à cette fréquence (référer vous à votre graphe). Que se passe-t-il ?

- Régler la tension afin d'obtenir une fréquence du moteur égale à deux fois f_0. Que se passe-t-il ?

- Pourquoi observe-t-on des battements ?

2.2 Interprétation

Nous allons tenter de comprendre pourquoi une oscillation paramétrique nécessite une excitation à fréquence double pour entrer en résonance.

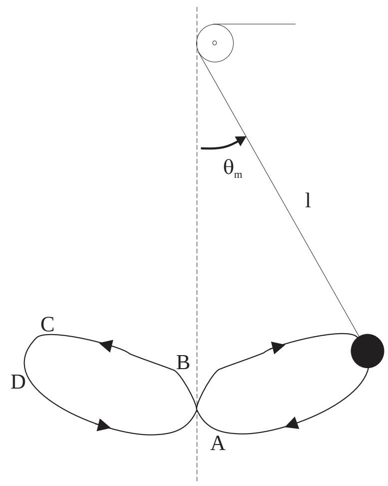

FIG. 4 – Schéma de la trajectoire du centre de masse

La figure 4 présente un schéma de la trajectoire du centre de masse du pendule lorsque l'excitation est effectuée à la fréquence double de la fréquence propre du système. Le fil est raccourci de dl lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre et s'allonge de dl lorsque $\theta = \theta_m$. Supposons que les déplacements AB et CD s'effectuent en un temps court par rapport à la période T du pendule ; θ ne varie pratiquement pas pendant ces déplacements.

1) Calculer le travail W_1 fourni par le moteur lors d'un déplacement AB.

2) L'ensemble formé par le moteur et le pendule est isolé : son énergie est donc constante. En déduire la variation d'énergie mécanique dE_1 du pendule

3) Calculer le travail W_2 fourni par le moteur lors d'un déplacement CD.

4) En déduire la variation d'énergie mécanique dE_2 du pendule.

5) Calculez la variation dE d'énergie du pendule pour une oscillation complète de celui-ci (2 fois AB et 2 fois CD).

6) Discussion des résultats :

- Comment varie l'énergie mécanique E_m du pendule au cours du temps ?

- Comment varie l'amplitude maximale des oscillations au cours du temps ? Justifiez.

- Comparez la fréquence des apports d'énergie au pendule et la fréquence des oscillations de celui-ci. (Cette propriété est générale pour les oscillateurs paramétriques).

Est-il possible de démarrer ainsi des oscillations à partir d'un pendule immobile dans sa position d'équilibre ? Justifiez.

Si vous avez le temps...

Rendez vous sur le site :
http ://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/botafumeiro.html. Une très belle simulation flash du botafumeiro y est présentée. Passez en mode manuel et tentez de faire faire un tour complet à l'encensoir (vous avez toutes les cartes en mains...).