TP ondes et vibrations : les oscillateurs couplés

1 Les pendules couplés

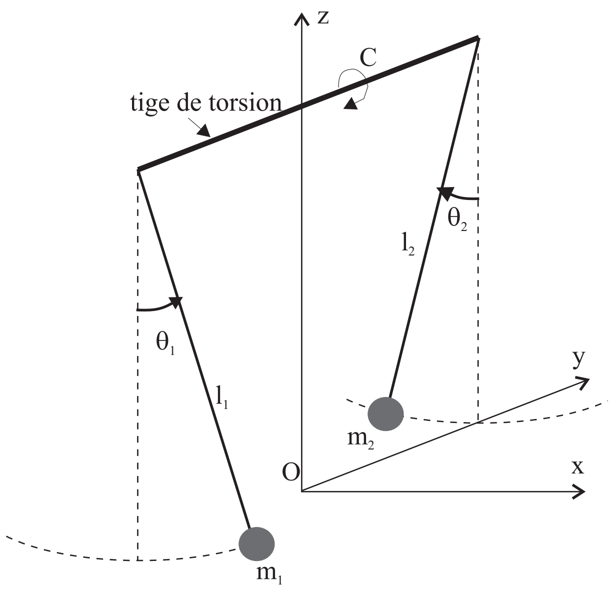

Fig. 1 – schéma des pendules couplés

La figure 1 représente deux pendules oscillant dans le plan Oxz. Ils sont couplés par une tige transversale horizontale. La torsion de cette tige exerce un couple de rappel sur chacun des pendules proportionnel à la postion relative des pendules $|\theta_1 - \theta_2|$ et à une constante C liée à sa raideur. Par ce couplage, la force à l'instant t exercée sur le pendule 1 dépend de sa propre position mais aussi de la position du pendule 2 au même instant (et réciproquement). L'équation du mouvement pour chacun des 2 pendules s'écrit :

$$I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + m_1 g l_1 \sin \quad \theta_1 - C(\theta_2 - \theta_1) = \quad 0, \tag{1a}$$

$$I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + m_2 g l_2 \sin \quad \theta_2 - C(\theta_1 - \theta_2) = \quad 0, \tag{1b}$$

oô I est le moment d'inertie d'un pendule, c'est à dire la somme des moment d'inertie de la masse m (ml^2) et du pendule nu (J_0) par rapport à l'axe de rotation :

$$I_{1,2} = J_o + m_{1,2} l_{1,2}^2$$

Nous considérerons ici uniquement des oscillations harmoniques, les angles devront donc rester petits ($\theta_1,\ \theta_2 \ll 1$). En introduisant les notations suivantes : $K_i = C/I_i$ et

$\omega_i = \sqrt{m_i g l_i / I_i}$ oô $i = 1, 2$, le système s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \omega_1^2 \quad \theta_1 - K_1(\theta_2 - \theta_1) = \quad 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \quad \theta_2 - K_2(\theta_1 - \theta_2) = \quad 0 \tag{2b}$$

1.1 Pendules symétriques

Manipulation

Arrangez-vous pour avoir deux oscillateurs identiques (utilisez les grosses masses pour avoir une inertie importante et limiter les effets de frottements)

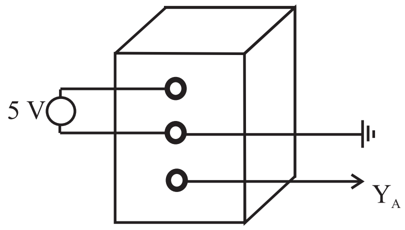

FIG. 2 – branchements pour la visualisation sur l'oscilloscope

Chaque oscillateur possède un boitier à 3 voies. Celles-ci permettent la visualisation des amplitudes d'oscillations sur l'oscilloscope.

Réaliser le branchement comme indiqué sur la figure 2.

Les modes propres

Nous considérons ici deux pendules identiques ($m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$). Nous avons donc maintenant dans le système d'équations (2) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $K_1 = K_2 = K$.

Une manière classique de résoudre ce problème est d'en calculer les valeurs propres puis d'en déduire les modes propres. Vous procéderez ici à l'envers, c'est à dire en identifiant les modes propres et en déduisant, leur valeur propre associée (la valeur de la pulsation associée). Par définition, un mode propre est un état du système qui n'évolue pas au cours du temps.

- Combien de modes propres existent-ils dans ce système ? Quels sont-ils ?

- Effectuer la mesure de chacune des pulsations propres ω_{01} et ω_{02} . Vous compterez 10 périodes afin de diminuer l'incertitude sur la mesure.

- Que peut-on dire de la grandeur $|\theta_1(t) - \theta_2(t)|$ dans chacun des 2 cas ? Comment peut-on modifier les équations 2 dans chacun des deux cas ?

- En déduire l'expression théorique de ω_{01} et ω_{02}, pulsations propres du système ($\omega_{01} < \omega_{02}$).

- En déduire la valeur expérimentale de la constante K.

Solution générale

L'avantage d'identifier et connaître les modes propres d'un système est que toutes solutions générales du système peuvent alors s'écrire comme une combinaison linéaire de ces solutions particulières :

$$\theta_1(t) = A\cos(\omega_{01}t + \phi_1) + B\cos(\omega_{02}t + \phi_2), \tag{3a}$$
$$\theta_2(t) = A\cos(\omega_{01}t + \phi_1) - B\cos(\omega_{02}t + \phi_2). \tag{3b}$$

Les constantes A, B, ϕ_1 et ϕ_2 sont alors déterminées par les conditions initiales.

- Visualiser les courbes sur l'oscilloscope lorsque les conditions initiales sont les suivantes :

$\theta_1(t=0) = \theta_0$, $\theta_2(t=0) = 0$, $\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$

- Représenter les courbes $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ observées.

On observe une dynamique de battements avec une période courte et une période longue.

- Identifier et mesurer ces deux périodes.

Nous allons comparer ces deux valeurs aux prédictions théoriques apportées par les solutions 4 et 5. En utilisant les conditions initiales écrites plus haut, montrer que $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A = B = \theta_0/2$ et que ces solutions s'écrivent :

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_{01}t) + \cos(\omega_{02}t)\right] = \theta_0 \cos\frac{(\omega_{02}-\omega_{01})t}{2}\cos\frac{(\omega_{02}+\omega_{01})t}{2}, \tag{4}$$
$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_{01}t) - \cos(\omega_{02}t)\right] = \theta_0 \sin\frac{(\omega_{02}-\omega_{01})t}{2}\sin\frac{(\omega_{02}+\omega_{01})t}{2}. \tag{5}$$

La modulation lente (de pulsation ω_M) sert alors d'enveloppe à la modulation rapide (de pulsation ω_m).

- Donner l'expression de ω_M et ω_m. Comparer ces valeurs à vos mesures expérimentales.

1.2 Etude de la résonance

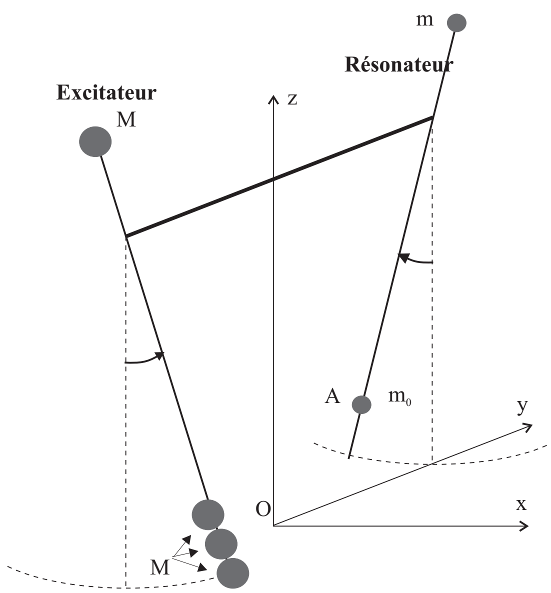

Fig. 3 – Pendules couplées en configuration Excitateur - Résonateur

Pour cette étude, un des oscillateurs joue le rôle de l'excitateur, l'autre celui du résonateur.

- Préparer l'excitateur et le résonateur en fixant les différentes masses comme illustré sur la figure 3 (les masses notées M et m désignent respectivement sont les grosses et les

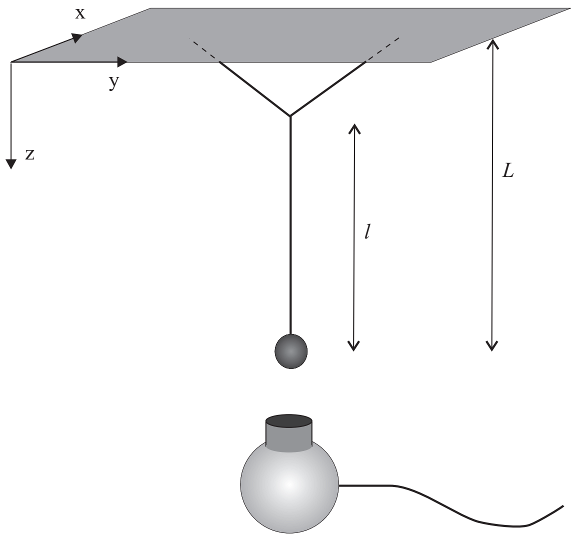

FIG. 4 – schéma du pendule "Y"

petites masses) . La petite masse noté m_0 sera déplacée verticalement afin de faire varier la fréquence propre du résonateur.

- Maintenir le résonnateur fixe et mesurer la période d'oscillation de l'excitateur T_e.

- Maintenir l'excitateur fixe et mesurer les périodes extrèmes du résonateur, T_{min} la masse A est en haut, T_{max} lorsqu'elle est en bas.

- Vérifier que $T_{min} < T_e < T_{max}$.

L'excitateur posséde une inertie beaucoup plus grande que le résonateur, il va donc jouer le rôle de forçage. Cependant, pour les mesures, il sera nécessaire de redonner une petite impulsion à l'excitateur telle manière à ce que son amplitude de varie pas. Pour cela, vous disposez d'un réglé souple vertical permettant un repère visuel. Entraînez vous à entretenir l'oscillation de l'excitateur avec une amplitude telle qu'il afleure le réglé à chaque passage. Pour chacune des 11 positions verticales de la masse A :

- Mesurer la période T_i du résonnateur, l'excitateur étant maintenu fixe ($T_{i=0} = T_{min}$).

- Repérer l'amplitude A_i d'oscillation du résonateur lorsque l'excitateur oscille (avec amplitude constante !). Vous porrez vous aider de l'oscilloscope.

- Tracer le graphe $\nu = f(A)$. Oô $\nu = \frac{1}{T}$ est la fréquence. Commenter.

- Calculer le facteur de qualité $Q = \frac{\nu_{max}}{\Delta\nu}$ de ce résonateur. Que signifie cette grandeur ?

2 Le pendule "Y"

Faites osciller le pendule "Y" avec des conditions initiales arbitraires. La masse décrit un mouvement complexe dans le plan xOy.

A l'aide de la webcam réaliser un enregistrement de ce mouvement complexe d'une durée de 30 sec. Sauvegarder le film au format .avi.

Nous utiliserons le logiciel *Regavi* et *Regressi* afin d'obtenir le graphe de la trajectoire de la masse dans le plan xOy.

Utilisation des Logiciels *Regavi* et *Regressi*

– Lancer Regavi
– Charger votre fichier .avi

- Régler le zoom à 2 et ajuster l'origine
- Cliquer sur mesure. Un curseur cible apparaît.
- Pointer la position de la masse puis avancer l'enregistrement à l'aide du bouton de lecture image par image.
- Pointer les positions successives de la masse afin d'en établir la trajectoire. (Attention, il faut s'arrêter avant la fin de l'enregistrement, autrement le programme peut planter. Arrêter quelques secondes avant)
- Cliquer sur le bouton "envoi des données vers *Regressi*", Puis "OK".
- Le programme Regressi se lance et trace le graphe d'acquisition.

Nous avons affaire à un problème à deux dimensions (spatiales cette fois-ci) et, comme vous le voyez, l'analyse directe de la trajectoire est complexe. Notre but est de décomposer ce mouvement suivant ses modes propres. Vous verrez que ceci simplifie l'étude de ce mouvement.

- Identifier les modes propres du système ainsi que leur fréquence propre théorique ω_1 et ω_2
- Dans le programme Regressi, choisir l'option "nombre de graphes / 2ième graphe à côté", puis tracer les fonctions $x = f(t)$ et $y = f(t)$ sur ce deuxième graphe. Commenter.
- Mesurer à partir des graphes les fréquences d'oscillation de chacune des courbes et comparer à vos prédictions.
- A partir de vos observations, proposer une équation paramétrique pour le mouvement du pendule Y.