

Exo 1

1) Montrer que $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

$$G: [A, BC] = ABC - BCA$$

$$D: B[A, C] + [A, B]C = B(AC - CA) + (AB - BA)C = \\ = \cancel{BAC} - BCA + ABC - \cancel{BAC} = ABC - BCA$$

qfd

2) La trace : $\text{Tr } A = \sum_n A_{nn}$

(la somme des éléments diagonaux)

Montrer que $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$

Notation Dirac : Opérateurs représentés par
matrices

éléments d'une matrice : $\langle m | A | n \rangle$

$$\text{Tr } A = \sum_n \langle n | A | n \rangle$$

Relation de fermeture :

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = \mathbb{1}, \text{ si } |m\rangle \text{ est une base compl\`ete}$$

$$\begin{aligned}
 T_r(AB) &= \sum_n \langle n | A B | n \rangle = \\
 &= \sum_n \langle n | A \left(\sum_m | m \rangle \langle m | \right) B | n \rangle = \\
 &= \sum_m \sum_n \underbrace{\langle n | A | m \rangle}_{\text{scalare}} \underbrace{\langle m | B | n \rangle}_{\text{scalare}} = \\
 &= \sum_m \sum_n \langle m | B | n \rangle \langle n | A | m \rangle = \sum_m \langle m | B \left(\sum_n | n \rangle \langle n | \right) A | m \rangle \\
 &= \sum_m \langle m | B A | m \rangle = T_r BA
 \end{aligned}$$

c.q.f.d

Exemple : espace d'hilbert $\mathcal{H}_2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$\{a, b, c, \dots = \text{scalaires}\}$
 $\Rightarrow ae=ea \text{ etc.}$

$$BA = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

$$T_r AB = ae+bg+cf+dh$$

$$T_r BA = ea+fc+gb+hd = ae+bg+cf+dh$$

(voir 12)

Changement de base $A \rightarrow A' = S A S^{-1}$

Montrer que la trace est invariante

$$\begin{aligned} \text{Tr } A' &= \text{Tr } (S A S^{-1}) = \sum_n \langle n | S A S^{-1} | n \rangle = \\ &= \sum_m \sum_n \underbrace{\langle n | S | m \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{change}}} \underbrace{\langle m | A S^{-1} | n \rangle}_{\substack{\downarrow \\ \text{change}}} = \\ &= \sum_m \sum_n \langle m | A S^{-1} | n \rangle \langle n | S | m \rangle = \\ &= \sum_m \langle m | A \underbrace{S^{-1} S}_{=1} | m \rangle = \sum_m \langle m | A | m \rangle = \text{Tr } A \end{aligned}$$

c.q.f.d

3.

$$\text{Tr } \overrightarrow{ABC} = \text{Tr } \overleftarrow{BCA} = \text{Tr } \langle BA$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Tr } ABC} &= \sum_n \langle n | ABC | n \rangle = \sum_{n,m} \langle n | A | m \rangle \langle m | BC | n \rangle = \\ &= \sum_{n,m} \langle m | BC | n \rangle \langle n | A | m \rangle = \sum_m \langle m | BCA | m \rangle = \\ &= \underline{\text{Tr } BCA} = \sum_{m,n} \langle m | B | n \rangle \langle n | CA | m \rangle = \\ &= \sum_n \langle n | CAB | n \rangle = \underline{\text{Tr } CAB} \end{aligned}$$

c.q.f.d

Ex 3

Commutateurs et valeurs propres

trois matrices, $N \times N$: A, B, C

$$[A, B] = 0 ; [A, C] = 0 ; [B, C] \neq 0 \quad \text{de } A$$

Montrer qu'au moins une valeur propre doit être dégénérée

ou base de vecteurs propres de A : $\{|v_i\rangle\}$

$$A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| ;$$

$$[A, B] = 0 \Rightarrow (AB = BA) \quad \leftarrow \text{action de}$$

$$(AB)|v_i\rangle = (BA)|v_i\rangle$$

$$A(B|v_i\rangle) = B(\lambda_i |v_i\rangle) = \lambda_i (B|v_i\rangle)$$

$\Rightarrow B|v_i\rangle$ est un vecteur propre d' A avec la valeur propre λ_i

$$\text{Également: } A(\langle v_i|) = \lambda_i (\langle v_i|)$$

$\Rightarrow \langle v_i|$ aussi v.p. d' A , avec la même valeur propre, λ_i .

Si t.q.

$$\text{Mais, } [B, C] \neq 0 \Rightarrow B|v_i\rangle \neq \langle v_i|$$

$\Rightarrow B|v_i\rangle$ et $\langle v_i|$ sont deux différents vecteurs propres d' A avec la même valeur propre.

$\Rightarrow$ Mais une valeur propre de A est dégénérée