

E24

Franges de Ransay - horloges atomiques

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \Rightarrow G_s^2 s_{y/2} \begin{matrix} (12) \\ (11) \end{matrix} \begin{matrix} F=4 & (E_2) \\ F=3 & (E_1) \end{matrix}$$

H_I , couplage

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & D \cdot E(t) \\ D \cdot E(t) & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\omega}{2\pi} \sim 9 \text{ GHz} \right)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} E_0 \left(e^{i(\omega t - \varphi)} + e^{-i(\omega t - \varphi)} \right), \text{ Micro-ondes}$$

D : moment dipolaire de la transition, resonant à environ $\frac{\omega_{12}}{2\pi} \sim 9 \text{ GHz}$

$$\omega_{12} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\hbar} (E_2 - E_1)$$

l'état de l'atome : $| \Psi \rangle = c_1(t) | 1 \rangle + c_2(t) | 2 \rangle$

1) Supposons solution libre : $H_I = 0$

$$i \hbar \frac{d}{dt} | \Psi \rangle = H | \Psi \rangle$$

$$i \hbar \left(\frac{dc_1}{dt} | 1 \rangle + \frac{dc_2}{dt} | 2 \rangle \right) = c_1 E_1 | 1 \rangle + c_2 E_2 | 2 \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{c}_1 = -i \frac{E_1}{\hbar} c_1 = -i \omega_1 c_1 \\ \dot{c}_2 = -i \omega_2 c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(t) = c_1(0) e^{-i \omega_1 t} \\ c_2(t) = c_2(0) e^{-i \omega_2 t} \end{cases}$$

Si $H_I \ll H_0$, une description sous cette forme doit être assez bien, même quand $|1\rangle$ et $|2\rangle$ ne sont pas états propres de $H_0 + H_I$.

On suppose on peut prendre une solution (par $H_0 + H_I$):

$$|\psi\rangle = c_1(t) e^{-i\omega_1 t} |1\rangle + c_2(t) e^{-i\omega_2 t} |2\rangle$$

et cherche les évolutions de $c_1(t)$ et $c_2(t)$, causée par l'interaction H_I .

2) Malheureusement, $H_{\text{Tot}} = H_0 + H_I = \begin{pmatrix} E_1 & D \cdot E \\ D \cdot E & E_2 \end{pmatrix}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 e^{-i\omega_1 t} \\ c_2 e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & D \cdot E \\ D \cdot E & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-i\omega_1 t} \\ c_2 e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar e^{-i\omega_1 t} (\dot{c}_1 - i\omega_1 c_1) = E_1 c_1 e^{-i\omega_1 t} + (D \cdot E) c_2 e^{-i\omega_2 t} \\ i\hbar e^{-i\omega_2 t} (\dot{c}_2 - i\omega_2 c_2) = (D \cdot E) c_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 c_2 e^{-i\omega_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_1 = c_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} (D \cdot E) = c_2 e^{-i\omega_2 t} \frac{D E_0}{2} (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}) \\ i\hbar \dot{c}_2 = c_1 e^{i\omega_2 t} \frac{D E_0}{2} (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}) \end{cases}$$

avec $\hbar \Omega \equiv D E_0$ (fréquence de Rabi, Ω)
 $(\Omega \ll \omega_{12})$

$$\begin{cases} i \dot{c}_1 = \frac{c_2 \Omega}{2} \left(e^{i(\omega - \omega_{12})t - \varphi} + e^{i(\omega + \omega_{12})t - \varphi} \right) \\ i \dot{c}_2 = \frac{c_1 \Omega}{2} \left(e^{i(\omega + \omega_{12})t - \varphi} + e^{-i(\omega - \omega_{12})t - \varphi} \right) \end{cases}$$

$(\omega_1 + \omega_2) \approx 2\pi \cdot 18 \text{ GHz}$, fréquence très rapide

si on est proche de résonance, $\omega \approx \omega_{12}$, le désaccord, $\Delta \equiv \omega - \omega_{12}$, est une fréquence lente.

Nous cherchons l'évolution lente. Cela correspond à prendre la moyenne du temps pour les termes avec $e^{i(\omega + \omega_{12})t}$. Du coup, on met ces termes en zéro "approx. du champ tournant".

$$\begin{cases} i \dot{c}_1 = \frac{\Omega}{2} e^{i(\Delta t - \varphi)} c_2 \\ i \dot{c}_2 = \frac{\Omega}{2} e^{-i(\Delta t - \varphi)} c_1 \end{cases}$$

- 3.) Supposons le désaccord $\Delta = 0$, et les conditions initiales sont $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$.
 C'est à dire, quand le champ micro-onde est allumé l'atome est dans l'état $|1\rangle$.

$$\begin{cases} i\dot{C}_1 = \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} C_2 \\ i\dot{C}_2 = \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{C}_1 = -\frac{\Omega^2}{4} e^{-i\varphi} C_2 = -\frac{\Omega^2}{4} C_1 \\ \ddot{C}_2 = -\frac{\Omega^2}{4} C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(t) = A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + B e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \\ C_2(t) = C e^{i\frac{\Omega}{2}t} + D e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \end{cases} ; \begin{cases} C_1(0) = A + B = 1 \\ C_2(0) = C + D = 0 \end{cases}$$

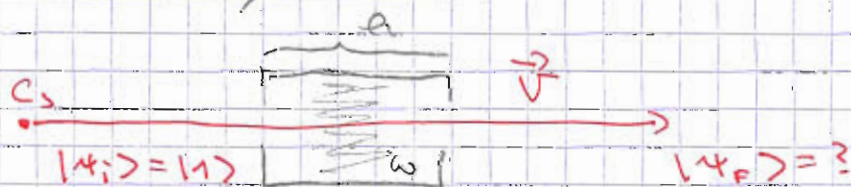
$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = \frac{i\Omega}{2} (A e^{i\frac{\Omega}{2}t} - B e^{-i\frac{\Omega}{2}t}) = -\frac{i\Omega}{2} e^{-i\varphi} (C e^{i\frac{\Omega}{2}t} + D e^{-i\frac{\Omega}{2}t}) \\ \dot{C}_2(t) = \frac{i\Omega}{2} (C e^{i\frac{\Omega}{2}t} - D e^{-i\frac{\Omega}{2}t}) = -\frac{i\Omega}{2} e^{i\varphi} (A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + B e^{-i\frac{\Omega}{2}t}) \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} A - B = -e^{-i\varphi} (C + D) = 0 \\ C - D = -e^{i\varphi} (A + B) = -e^{i\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{2} ; C = -D = -\frac{1}{2} e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{1}{2} (e^{i\frac{\Omega}{2}t} + e^{-i\frac{\Omega}{2}t}) = \cos \frac{\Omega t}{2} \\ C_2(t) = -\frac{e^{i\varphi}}{2} (e^{i\frac{\Omega}{2}t} - e^{-i\frac{\Omega}{2}t}) = -i e^{i\varphi} \sin \frac{\Omega t}{2} \end{cases}$$

4) Un atome de vitesse v passe un crête de micro-ondes, de longueur λ



En effet, l'atome sans un pulse de micro-ondes de $T = \frac{h}{v}$

Udome enle dans l'etal $|1\rangle$, et on choisit $t = t_1 =$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(t_1) = \cos \frac{\Omega t_1}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2(t_1) = -i e^{i\varphi} \sin \frac{\Omega t_1}{2} = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega_1 t_1} |1\rangle - i e^{i\varphi} e^{-i\omega_2 t_1} |2\rangle \right) =$$

$$= \frac{e^{-i\omega_1 t_1}}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle - i e^{i\varphi} e^{-i\omega_2 t_1} |2\rangle \right)$$

(phase globale)

Supposons au lieu $t = t_2 = 2t_1 = \frac{\pi}{\Omega}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(t_2) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ c_2(t_2) = -i e^{i\varphi} \end{cases} \Rightarrow |1(t_2)\rangle = -i e^{i\varphi} |2\rangle = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} |2\rangle$$

↑ phase globale

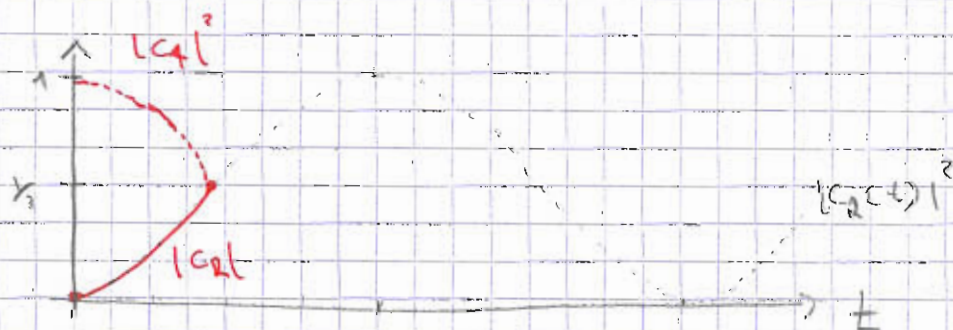
probabilités :

$$\begin{cases} P_1 = |c_1|^2 = \cos^2 \frac{\Omega t}{2} \\ P_2 = |c_2|^2 = \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \end{cases}$$

pour $t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$

évolution de

$$\begin{cases} |c_1(t)|^2 = 1 \\ |c_2(t)|^2 = 0 \end{cases} \quad \text{à} \quad \begin{cases} |c_1(t_1)|^2 = \frac{1}{2} \\ |c_2(t_1)|^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

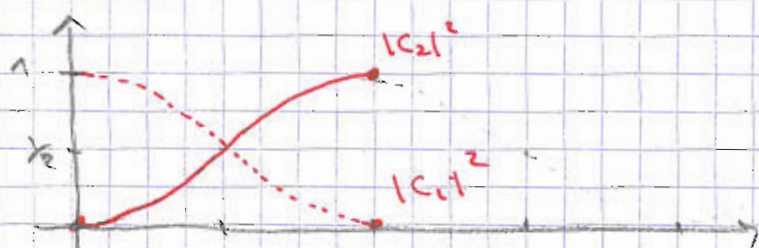


"pulse" $= \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Superposition egal dans la sortie

pour $T_2 = \frac{\pi}{\Omega}$

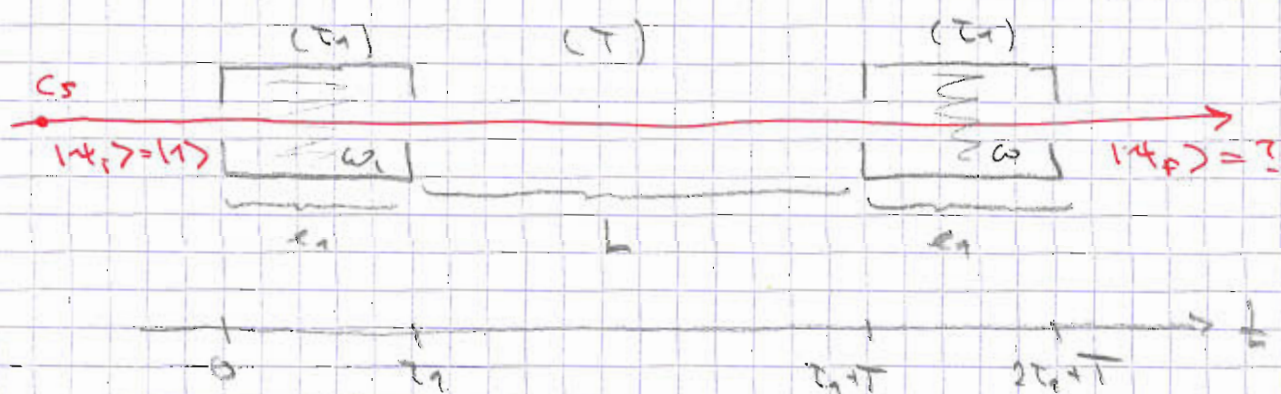
evolution de $\begin{cases} |C_1(t)|^2 = 1 \\ |C_2(t)|^2 = 0 \end{cases}$ à $\begin{cases} |C_1(t_2)|^2 = 0 \\ |C_2(t_2)|^2 = 1 \end{cases}$



"pulse - π "

interaction de la population dans la sortie

5) L'atome passe 2 champs de micro-ondes, séparés par une distance L . Le temps de vol entre les 2 champs (avec évolution libre) : $T = \frac{L}{v}$



$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$

$|\psi(t_1)\rangle = e^{-i\omega_1 t_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + i e^{i\phi_1} e^{-i\omega_2 t_1} |2\rangle \right)$

entre $t = t_1$ et $t = t_1 + T$: propagation libre

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(\tau_1+T) = C_1(\tau_1) e^{-i\omega_1 T} \\ C_2(\tau_1+T) = C_2(\tau_1) e^{-i\omega_2 T} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |4'(\tau_1+T)\rangle &= \frac{\cancel{e^{-i\omega_1 \tau_1}}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega_1 T} |1\rangle - i e^{i\varphi_1} e^{-i(\omega_2 \tau_1 + \omega_2 T)} |2\rangle \right) = \\ &= \frac{e^{-i\omega_1(\tau_1+T)}}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle - i e^{i\varphi_1} e^{-i\omega_2(\tau_1+T)} |2\rangle \right) \end{aligned}$$

Après $t = \tau_1 + T$, il y a un autre pulse $-\frac{\pi}{2}$, mais avec des conditions initiales plus compliquées.

La partie $|1\rangle$ de $|4\rangle$ va évoluer comme pour la solution avec $\{C_1(\omega)=1, C_2(\omega)=0\}$

$$\Rightarrow |1\rangle \longrightarrow \frac{\cancel{e^{-i\omega_1 \tau_1}}}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle - i e^{i\varphi_2} e^{-i\omega_2 \tau_1} |2\rangle \right)$$

La partie $|2\rangle$ de $|4\rangle$ va évoluer comme pour $\{C_1(\omega)=0, C_2(\omega)=1\}$. Ce problème se doit être symétrique avec la solution précédente.

$$\Rightarrow |2\rangle \longrightarrow \frac{\cancel{e^{-i\omega_2 \tau_1}}}{\sqrt{2}} \left(-i e^{-i\varphi_2} |1\rangle + e^{-i\omega_2 \tau_1} |2\rangle \right)$$

$$\begin{aligned} |4(2\tau_1+T)\rangle &= \frac{e^{-i\omega_1(2\tau_1+T)}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\cancel{e^{-i\omega_1 \tau_1}}}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle - i e^{i\varphi_2} e^{-i\omega_2 \tau_1} |2\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - i e^{i\varphi_1} e^{-i\omega_2(\tau_1+T)} \frac{\cancel{e^{-i\omega_1 \tau_1}}}{\sqrt{2}} \left(-i e^{-i\varphi_2} |1\rangle + e^{-i\omega_2 \tau_1} |2\rangle \right) \right\} = \\ &= \frac{e^{-i\omega_1(2\tau_1+T)}}{2} \left\{ \left(1 - e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} e^{-i\omega_2(\tau_1+T)} \right) |1\rangle \right. \\ &\quad \left. - i e^{-i\omega_2 \tau_1} \left(e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_1} e^{-i\omega_2(\tau_1+T)} \right) |2\rangle \right\} \end{aligned}$$

Les phases φ_1 et φ_2 sont des phases des champs micro-ondes, fournis par la même source. Seulement la différence, $\varphi_2 - \varphi_1$, va être important et cela va correspondre à une évolution du champ pendant le temps : $\varphi_2 - \varphi_1 = \omega(\tau_1 + T)$

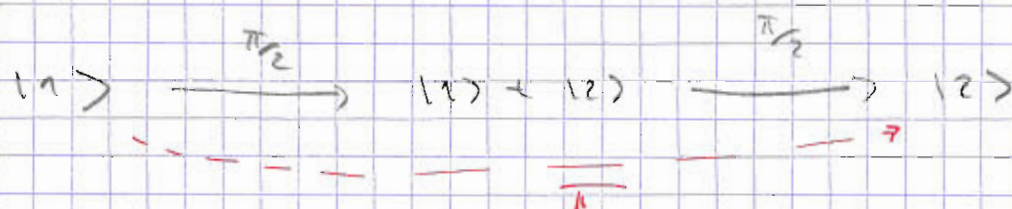
$$\Rightarrow \text{avec } \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = -\omega(\tau_1 + T)$$

$$\begin{aligned} |\Psi(2\tau_1 + T)\rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - e^{i\omega(\tau_1+T)} e^{-i\omega_{12}(\tau_1+T)} \right) |1\rangle \right. \\ &\quad \left. - i e^{-i\omega_{12}\tau_1} \left(e^{-i\omega(\tau_1+T)} + e^{-i\omega_{12}(\tau_1+T)} \right) |2\rangle \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - e^{\Delta(\tau_1+T)} \right) |1\rangle - i e^{-i\omega_{12}(2\tau_1+T)} \left(e^{-i\Delta(\tau_1+T)} + 1 \right) |2\rangle \right\} \end{aligned}$$

et si exact resonance, $\Delta = 0$

$$|\Psi(2\tau_1 + T)\rangle = -\frac{1}{2} e^{-i\omega_{12}(2\tau_1+T)} \cdot 2 |2\rangle = \cancel{e^{-i\omega_{12}(2\tau_1+T)}} |2\rangle$$

Alors :



C'est comme les fentes de Young, mais dans un domaine temporelle. Le deux pulses $\pi/2$ seront une pulse π ensemble, SEULEMENT si ces deux pulses d'intervalles sont en phase.

6) pulse π ; population en $|2\rangle$ comme fon de Δ .
 $\Rightarrow \tau = \tau_2 = \frac{\pi}{\Omega}$, et nous prenons $\varphi = 0$

$$\begin{cases} i \dot{C}_1 = \frac{\Omega}{2} e^{i\Delta t} C_2 \\ i \dot{C}_2 = \frac{\Omega}{2} e^{-i\Delta t} C_1 \end{cases}$$

On cherche sol. sous forme perturb., avec $\lambda \ll 1$

$$\begin{cases} C_1(t) = C_1^{(0)}(t) + \lambda C_1^{(1)}(t) + \lambda^2 C_1^{(2)}(t) + \dots \\ C_2(t) = C_2^{(0)}(t) + \lambda C_2^{(1)}(t) + \dots \end{cases}$$

C'est à dire, nous avons traité l'interaction H_I comme une perturbation de H_0

$$H_{\text{tot}} = H_0 + \lambda H_I \quad ; \text{ avec } \lambda \ll 1$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} E_1 & \lambda D \cdot E \\ \lambda D \cdot E & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \lambda \frac{\hbar\Omega}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ \lambda \frac{\hbar\Omega}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & E_2 \end{pmatrix}$$

à la première ordre :

$$\begin{cases} i (\dot{C}_1^{(0)} + \lambda \dot{C}_1^{(1)}) = \frac{\lambda\Omega}{2} e^{i\Delta t} (C_2^{(0)} + \lambda C_2^{(1)}) \\ i (\dot{C}_2^{(0)} + \lambda \dot{C}_2^{(1)}) = \frac{\lambda\Omega}{2} e^{-i\Delta t} (C_1^{(0)} + \lambda C_1^{(1)}) \end{cases}$$

on résout en puissance de λ :

$$\begin{cases} i \dot{C}_1^{(0)} = 0 \\ i \dot{C}_2^{(0)} = 0 \end{cases}, \text{ avec cond. init. } \Rightarrow \begin{cases} C_1^{(0)} = 1 \\ C_2^{(0)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i \dot{c}_1^{(1)} = \frac{\Omega}{2} e^{i\Delta t} c_2^{(0)} = 0 \\ i \dot{c}_2^{(1)} = \frac{\Omega}{2} e^{-i\Delta t} c_1^{(0)} = \frac{\Omega}{2} e^{-i\Delta t} \end{cases}$$

L'action de la pulse de $\tau = \tau_2 = \frac{1}{\Omega}$:

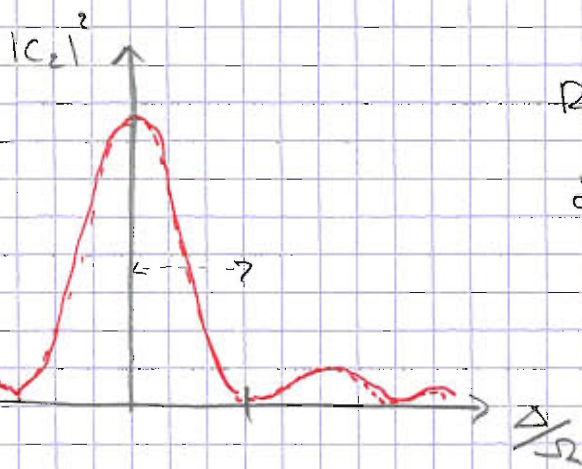
$$c_2^{(1)}(\tau_2) - c_2^{(1)}(0) = \int_0^{\tau_2} \left(\frac{\Omega}{2i} e^{-i\Delta t} \right) dt = c_2^{(1)}(\tau_2)$$

$$\begin{aligned} c_2^{(1)}(\tau_2) &= \frac{\Omega}{2i} \left[\frac{i}{\Delta} e^{-i\Delta t} \right]_0^{\tau_2} = \frac{\Omega}{2\Delta} \left(e^{-i\Delta\tau_2} - 1 \right) = \\ &= \frac{\Omega}{2\Delta} \left(e^{-i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} - 1 \right) = \frac{\Omega}{2\Delta} e^{-i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} \left(e^{i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} - e^{-i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} \right) = \\ &= \frac{\Omega}{2\Delta} e^{-i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} \left(-2i \sin \frac{\pi\Delta}{2\Omega} \right) = \\ &= -\frac{i\pi}{2} e^{-i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} \left(\sin \frac{\pi\Delta}{2\Omega} \right) \left(\frac{2\Omega}{\pi\Delta} \right) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\frac{\pi\Delta}{2\Omega}} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi\Delta}{2\Omega} \right) \end{aligned}$$

population en $|2\rangle$ à première ordre :

$$|c_2(\tau_2)|^2 \approx |c_2^{(0)}(\tau_2) + c_2^{(1)}(\tau_2)|^2 = |c_2^{(1)}(\tau_2)|^2 =$$

$$= \frac{\pi^4}{4} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi\Delta}{2\Omega} \right)$$



Rayon de pic central (disque d'Airy) :

$$\frac{\pi\Delta_{ad}}{2\Omega} = \pi$$

$$\Rightarrow \Delta_{ad} = 2\Omega$$

Donc, si on scan ω , et detect la population on $|2\rangle$, on peut determiner ω_{12} avec une precision $\sim 2\Delta$

On, avec un durée de pulse quelconque, on a une precision $\sim \frac{\pi}{T}$. Du coup, pour une bonne precision on doit prendre un carré très longue, un angle des atomes très petits. Les deux choses sont difficiles

7) Population de $|2\rangle$ si la pulse- π est divisée en 2 pulses- $\frac{\pi}{2}$, avec un temps de propagation libre entre les deux.

Quand une pulse est allumée : $\dot{C}_2^{(1)} = \frac{\Omega}{2i} e^{-i\Delta t}$

Pendant propagation libre : $\dot{C}_2^{(1)} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_2^{(1)}(2T_1+T) &= \int_0^{T_1} \dot{C}_2^{(1)}(t) dt + \int_{T_1}^{T_1+T} \dot{C}_2^{(1)}(t) dt + \int_{T_1+T}^{T+2T_1} \dot{C}_2^{(1)}(t) dt = \\ &= \frac{\Omega}{2i} \int_0^{T_1} e^{-i\Delta t} dt + \int_{T_1}^{T_1+T} 0 dt + \int_{T_1+T}^{T+2T_1} e^{-i\Delta t} dt = \\ &= \frac{\Omega}{2\Delta} \left\{ \left(e^{-i\Delta 2T_1} - 1 \right) + \left(e^{-i\Delta(2T_1+T)} - e^{-i\Delta(T_1+T)} \right) \right\} = \\ &= \frac{\Omega}{2\Delta} \left\{ \left(e^{-i\Delta T_1} - 1 \right) + e^{-i\Delta(T_1+T)} \left(e^{-i\Delta T_1} - 1 \right) \right\} = \end{aligned}$$

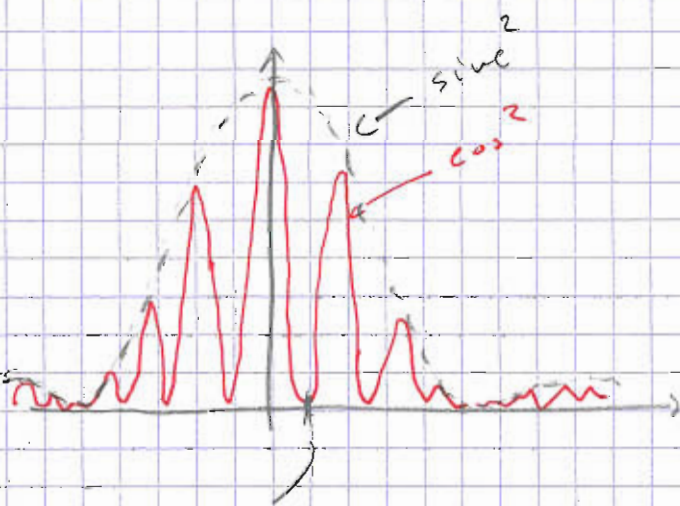
$$\begin{aligned}
 c_2^{(1)}(2T_1 + T) &= \frac{\Omega}{2\Delta} \left(e^{-i\Delta T_1} - 1 \right) \left(1 + e^{-i\Delta(T_1 + T)} \right) = \\
 &= \frac{\Omega}{2\Delta} e^{-\frac{i\Delta T_1}{2}} \left(e^{-\frac{i\Delta T_1}{2}} - e^{\frac{i\Delta T_1}{2}} \right) e^{-\frac{i\Delta}{2}(T_1 + T)} \left(e^{\frac{i\Delta}{2}(T_1 + T)} + e^{-\frac{i\Delta}{2}(T_1 + T)} \right) = \\
 &= \frac{\Omega}{2\Delta} e^{-\frac{i\Delta}{2}(2T_1 + T)} \left(-2i \sin \frac{\Delta T_1}{2} \right) \left(2 \cos \frac{\Delta}{2}(T_1 + T) \right) = \\
 &= -i\Omega T_1 e^{-\frac{i\Delta}{2}(2T_1 + T)} \operatorname{sinc} \frac{\Delta T_1}{2} \cos \left\{ \frac{\Delta}{2}(T + T_1) \right\}
 \end{aligned}$$

et avec $T_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$

$$c_2^{(1)}(2T_1 + T) = -\frac{i\pi}{2} e^{-\frac{i\Delta}{2}(2T_1 + T)} \operatorname{sinc} \left(\frac{\Delta\pi}{4\Omega} \right) \cos \left\{ \frac{\Delta T}{2} + \frac{\Delta\pi}{4\Omega} \right\}$$

la population :

$$\begin{aligned}
 |c_2^{(1)}(2T_1 + T)|^2 &= \Omega^2 T_1^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\Delta T_1}{2} \right) \cos^2 \left\{ \frac{\Delta}{2}(T + T_1) \right\} = \\
 &= \frac{\pi^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\Delta\pi}{4\Omega} \right) \cos^2 \left\{ \frac{\Delta T}{2} + \frac{\Delta\pi}{4\Omega} \right\}
 \end{aligned}$$



$$\frac{\Delta T}{2} (T + T_1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \Delta T &= \frac{\pi}{T + T_1} = \\
 &= \frac{\pi}{T + \frac{\pi}{2\Omega}}
 \end{aligned}$$

On obtient une disque d'Ivry ($\sin^2$), avec un $\cos^2$ superposé, cela est effectivement l'interférence entre les deux pulses.

Maintenant le signal est divisé en franges, ("franges de Ramsey"), et la frange central a une largeur $\Delta f \sim \frac{\pi}{(T+T_1)}$

Alors, on peut avoir deux cavités courtes, séparées par une longue distance et obtenir une précision qui est pur de $\sim \frac{1}{T}$

$\Rightarrow$ Horloge très exacte !