

Ex 3

Commutateurs et valeurs propres

trois matrices, $N \times N$: A, B, C

$$[A, B] = 0 ; [A, C] = 0 ; [B, C] \neq 0 \quad \text{de } A$$

Montrer qu'une matrice avec valeur propre doit être dégénérée

ou base de vecteurs propres de A : $\{|v_i\rangle\}$

$$A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| ;$$

$$[A, B] = 0 \Rightarrow (AB = BA) \quad \leftarrow \text{action de}$$

$$(AB)|v_i\rangle = (BA)|v_i\rangle$$

$$A(B|v_i\rangle) = B(\lambda_i |v_i\rangle) = \lambda_i (B|v_i\rangle)$$

$\Rightarrow B|v_i\rangle$ est un vecteur propre d' A avec la valeur propre λ_i

$$\text{Également : } A(\langle v_i|) = \lambda_i (\langle v_i|)$$

$\Rightarrow \langle v_i|$ aussi v.p. d' A , avec la même valeur propre, λ_i
 $\exists i$ t.q.

$$\text{Mais, } [B, C] \neq 0 \Rightarrow B|v_i\rangle \neq \langle v_i|$$

$\Rightarrow B|v_i\rangle$ et $\langle v_i|$ sont deux différents vecteurs propres d' A avec la même valeur propre

$\Rightarrow$ Mais une valeur propre de A est dégénérée