

Ex 4

MATRICES NORMALES

Une matrice est "normale" (~~et diagonalisable~~) si elle commute avec ~~sa~~ matrice conjuguée

$$CC^{\dagger} = C^{\dagger}C \Rightarrow [C, C^{\dagger}] = 0$$

par définition

On peut écrire:

$$C = \underbrace{\frac{1}{2}(C+C^{\dagger})}_A + i \underbrace{\frac{1}{2i}(C-C^{\dagger})}_B = A + iB$$

$$A^{\dagger} = \frac{1}{2}(C^{\dagger}+C) = A$$

$$B^{\dagger} = -\frac{1}{2i}(C^{\dagger}-C) = \frac{1}{2i}(C-C^{\dagger}) = B$$

} A et B sont
hermitiques

$\Rightarrow$ A et B sont diagonalisables, mais pas
nécessairement
par nécessité dans le même temps (même base)

$$\begin{aligned} \text{test: } [A, B] &= \frac{1}{2}(C+C^{\dagger}) \times \frac{1}{2i}(C-C^{\dagger}) - \frac{1}{2i}(C-C^{\dagger}) \times \frac{1}{2}(C+C^{\dagger}) = \\ &= \frac{1}{4i} \left\{ \cancel{C^2} - \underbrace{CC^{\dagger} + C^{\dagger}C}_{=0} - \cancel{C^{\dagger 2}} - \underbrace{\cancel{C^2} - CC^{\dagger} + C^{\dagger}C + C^{\dagger 2}}_{=0} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Diagonalisable dans le même temps!

$\Rightarrow C = A + iB$ est aussi diagonalisable!