

Exo 6

Identités opérationnelles

Opérateur : $F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$

Chercher : $\frac{dF}{dt}$ et $\frac{d^2F}{dt^2}$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tA)^n}{n!} =$$

$$= \left(1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots \right) B \left(1 - tA + \frac{t^2 A^2}{2} - \dots \right) =$$

$$= B + t \overbrace{(AB - BA)}^{=[A,B]} + t^2 \left(\frac{A^2 B}{2} - ABA + \frac{BA^2}{2} \right) + \dots =$$

$$= B + t[A, B] + \frac{t^2}{2} (AAB - ABA - ADA + BAA) + \dots =$$

$$= B + t[A, B] + \frac{t^2}{2} \left\{ A \overbrace{(AB - BA)}^{=[A,B]} - \overbrace{(AB - BA)A}^{=[A,B]} \right\} + \dots =$$

$$\left\{ \text{Definition : } C \equiv [A, B] \right\}$$

$$= B + tC + \frac{t^2}{2} \overbrace{AC - CA}^{=[A,C]} + \dots =$$

$$= B + tC + \frac{t^2}{2} [A, C] + \dots$$

La dérivée

$$\frac{dF}{dt} = C + t[A, C] + \dots$$

Comparer avec :

$$F(t) = B + t[A, B] + \dots = e^{tA} B e^{-tA}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = e^{tA} \frac{d}{dt} e^{-tA} = e^{tA} [A, B] e^{-tA} = e^{tA} (AB - BA) e^{-tA} =$$

$$= e^{tA} AB e^{-tA} - e^{tA} BA e^{-tA} = A \overbrace{e^{tA} B e^{-tA}}^{= F(t)} - \overbrace{e^{tA} B e^{-tA} A}^{= F(t)A} =$$

$$= A F(t) - F(t) A = [A, F(t)]$$

Deuxième dérivée

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d}{dt} ([A, F(t)]) = \frac{d}{dt} (e^{tA} [A, B] e^{-tA}) =$$

$$= [A, (e^{tA} B e^{-tA})] = [A, [A, F(t)]]$$

partie 2

supposons: $[A, [A, B]] = 0$ et $[B, [A, B]] = 0$

Cherchons eq. diff. pour: $g(t) = e^{At} e^{Bt}$

$$\frac{dg}{dt} = A \overbrace{e^{At} e^{Bt}}^{g(t)} + \overbrace{e^{At} B e^{Bt}}^{\rightarrow \text{partie 1.}} = A g(t) + e^{At} B \underbrace{e^{Bt}}_{=1} =$$

$$= A g(t) + \left\{ B + t[A, B] + \frac{t^2}{2}[A, [A, B]] + \dots \right\} g(t) =$$

$$= (A + B + t[A, B]) g(t) \leftarrow \text{eq. diff. !}$$

Intégration entre $t=0$ et $t=1$:

gauche: $\int_0^1 \frac{dg(t)}{dt} dt = g(t=1) - g(t=0) = e^A e^B - 1$

Drucke: $\int_0^1 (A+B+t[A,B]) g(t) dt =$

Annotations: $\int_0^1 e^{At} dt$, $\int_0^1 e^{Bt} dt$, $\int_0^1 t[A,B] dt$

$$= \left[\exp \left\{ (A+B)t + [A,B] \frac{t^2}{2} \right\} g(t) \right]_0^1 =$$

Annotation: $\frac{=1}{2}$

$$= \exp \left\{ A+B + \frac{1}{2} [A,B] \right\} - 1$$

$$\Rightarrow e^A e^B = \exp \left\{ A+B + \frac{1}{2} [A,B] \right\} = e^{A+B} e^{\frac{1}{2} [A,B]}$$

Annotation: $\frac{1}{2} [A,B]$ part, since for A and B commute we get $[A,B]=0$

$$\Rightarrow e^A e^B e^{-\frac{1}{2} [A,B]} = e^{A+B} ; \text{ c.q.f.d. !}$$

Analogie:

$$e^B e^A = e^{B+A} e^{\frac{1}{2} [B,A]} = e^{A+B} e^{-\frac{1}{2} [A,B]}$$

$$e^B e^A e^{\frac{1}{2} [A,B]} = e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2} [A,B]}$$

$$e^A e^B = e^B e^A e^{\frac{1}{2} [A,B]} e^{\frac{1}{2} [A,B]} = e^B e^A e^{[A,B]}$$

c.q.f.d. !