Exercice 1 Addition de deux signaux de même fréquence

Supposons deux signaux sinusoidaux $S_1(t) = S_0\cos(\omega t)$ et $S_2(t) = S_0\sin(\omega t)$.

►**1.** En utilisant les représentations complexes, calculer la somme $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$.

►**2.** Préciser l'amplitude et la phase à l'origine de ce signal.

►**3.** Tracer les fonctions $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S(t)$; vérifier le résultat précédent.

►**4.** Si ces deux signaux sont deux tensions telles que $S_1(t)$ soit la tension aux bornes d'une résistance et $S_2(t)$ la tension aux bornes d'un second dipôle, en déduire la nature de ce second dipôle.

réponses : 2) $\sqrt{2}S_0$ et $-\pi/4$

Exercice 2 Circuits RC, RL et RLC série

Pour toutes les questions ci-dessous, on suppose que le régime permanent du régime harmonique est établi et on établira l'amplitude complexe du courant, l'amplitude du courant, ainsi que la tangente de la phase à l'origine en fonction de ω et des paramètres de la question.

►**1.** On étudie le circuit RC série soumis à un générateur idéal de tension de fem $e(t) = E\cos(\omega t)$. Etablir l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans ce circuit. On donne $E = 10$V, $\omega = 63 \cdot 10^2$rad.s^{-1}, $R = 1.0$kΩ et $C = 0.16\mu$F.

►**2.** Même question pour un circuit RL série. On prendra les mêmes valeurs numériques et $L = 91$mH.

►**3.** Même question pour un circuit RLC série et les mêmes valeurs numériques.

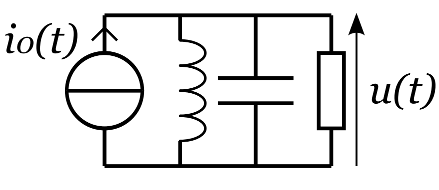
réponses : 1) $\underline{I}(j\omega) = \frac{E}{R}\frac{j\tau\omega}{1+j\tau\omega}$, $I(\omega) = \frac{E}{R}\frac{\tau\omega}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$ et $\tan(\varphi_i(\omega)) = \frac{1}{\tau\omega}$, avec $\tau = RC$.

2) $\underline{I}(j\omega) = \frac{E}{R}\frac{1}{1+j\tau\omega}$, $I(\omega) = \frac{E}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$ et $\tan(\varphi_i(\omega)) = -\tau\omega$, avec $\tau = L/R$.

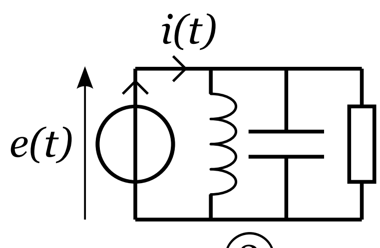
3) $\underline{I}(j\omega) = \frac{E}{R}\frac{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$, $I(\omega) = \frac{E/R}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$ et $\tan(\varphi_i(\omega)) = Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Exercice 3 Circuit RLC parallèle

On considère un circuit composé de trois dipôles linéaires regroupés en parallèle : un résistor de résistance R, une bobine idéale d'inductance L et un condensateur idéal de capacité C. On suppose le régime permanent atteint.



1



2

►**1.** Le circuit est alimenté par un générateur de courant fournissant une intensité $i_0(t) = I_0\cos(\omega t)$.

– Etablir l'expression de la tension aux bornes du résistor, de la bobine et du générateur.

– Donner l'allure de la courbe représentant la variation de l'amplitude de la tension aux bornes du résistor U en fonction de ω. Pour quelle valeur de ω est-elle maximale ?

– Soit U^{max} la valeur maximale de U. On note ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) les deux pulsations pour lesquelles $U(\omega_{1,2}) = U^{max}/\sqrt{2}$. Exprimer le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$

en fonction de R, L et C. Cette expression correspond-elle à celle du circuit RLC série. Commenter.

▶**2.** Le circuit est alimenté par un générateur de tension idéal de fem $e = E\cos(\omega t)$. Etablir l'expression de l'amplitude I de l'intensité traversant le générateur et donner l'allure de la courbe $I(\omega)$. Commenter.

réponses : 1) $\underline{U}(j\omega) = RI_0\frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$, avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.
2) $\underline{I}(j\omega) = \frac{E}{R}(1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}))$.

Exercice 4 Circuit RLC série - régimes transitoire et permanent en régime sinusoidal forcé

Considérons le circuit dipolaire RLC série du cours alimenté par une tension sinusoidale ($e(t) = E_0\cos(\omega t)$).

▶**1.** Etablir que l'équation différentielle qui régit la tension aux bornes de la capacité C est :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E_0\cos(\omega t)$$

▶**2.** Donner l'expression intrinsèque de cette équation différentielle en fonction de Q, facteur de qualité et de la pulsation propre ω_0. Puis en fonction de α, coefficient d'amortissement et de ω_0.

▶**3.** Etablir que

$$u_C(t) = E_0\left[\sin(\omega_0 t) - \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\omega_0 t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right],$$

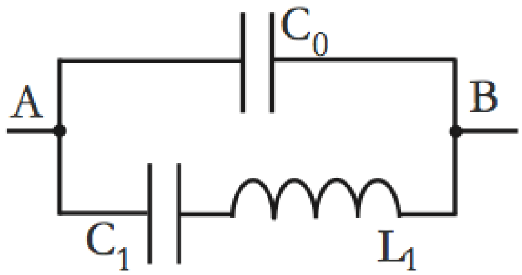
lorsque le circuit vérifie les conditions suivantes : **(a)** le condensateur est initialement déchargé ; **(b)** l'intensité est nulle initialement ; **(c)** la pulsation du générateur est $\omega = \omega_0$; **(d)** le coefficient d'amortissement vaut $\alpha = 1/2$.

Exercice 5

On alimente le dipôle AB avec une tension sinusoidale de pulsation ω

▶**1.** Déterminer l'impédance complexe de AB.

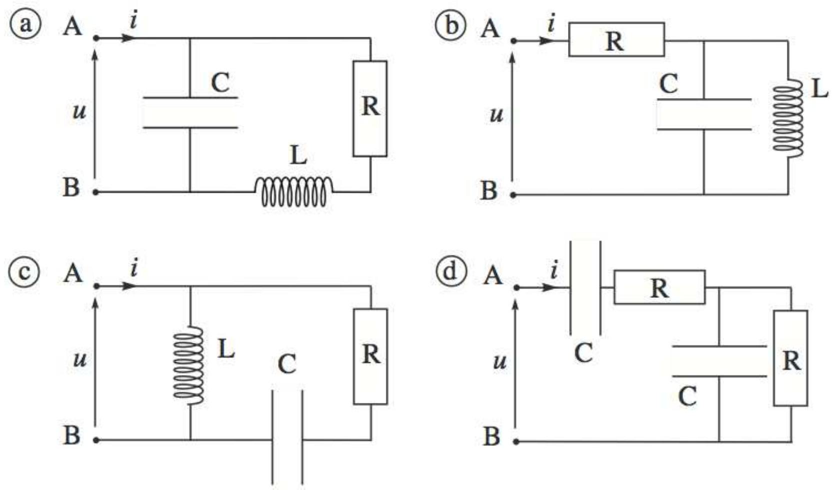
▶**2.** Tracer $|\underline{Z}| = Z(\omega)$, puis montrer que cette courbe présente deux singularités pour les pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) à déterminer.



réponses : $\underline{Z} = \frac{1-L_1C_1\omega^2}{j}\frac{1}{\omega(C_0+C_1-L_1C_0C_1\omega^2)}$

Exercice 6 Calculs d'impédances

Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du réseau dipolaire entre les bornes A et B dans les quatre cas suivants. En déduire à chaque fois le module Z ainsi que le déphasage de la tension u par rapport au courant i.

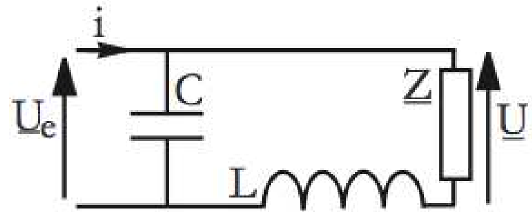


réponses : $\underline{Z}_c = R\frac{-LC\omega^2+j\omega L/R}{(1-LC\omega^2)+j\omega RC}$, $\underline{Z}_d = R\frac{1-(RC)^2\omega^2+3j\omega RC}{-(RC)^2\omega^2+j\omega RC}$
$\underline{Z}_a = R\frac{1+j\omega L/R}{1-LC\omega^2-j\omega RC}$, $\underline{Z}_b = \frac{R}{1-LC\omega^2}(1-LC\omega^2+j\omega L/R)$

Exercice 7

▶**1.** Exprimer $\underline{U}$ en fonction de $\underline{I}$, $\underline{Z}$, L, C et ω, pulsation du régime sinusoidal imposé à ce circuit.

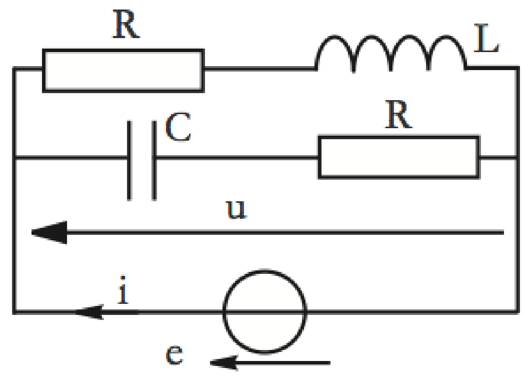
▶**2.** A quelle condition sur L, C et ω, le déphasage entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ ne dépend-il pas de $\underline{Z}$?



réponses : $LC\omega^2 = 1$

Exercice 8

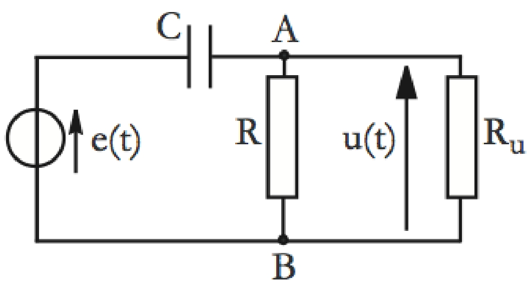
Sachant que $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, trouver la condition pour que $\underline{i}$ et $\underline{u}$ soient en phase quelle que soit ω.



réponses : $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, alors $\frac{U}{I} = R$.

Exercice 9 Réponse harmonique d'un dipôle

Déterminer la réponse harmonique $u(t)$ du dipôle AB ($R_u//R$) lorsqu'il est soumis à l'excitation sinusoidale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

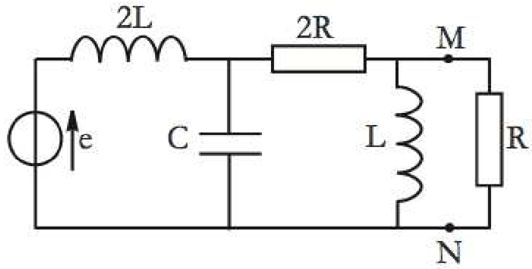


réponses : $\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{j\omega}{\omega_0 + j\omega}$, avec $\omega_0 = \frac{R+R_u}{RR_uC}$. $U_m = E_m \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}$ et $\varphi_u = \pi/2 - \arctan(\omega/\omega_0)$.

Exercice 10 Réseau à trois mailles

On considère le réseau à trois mailles indépendantes alimenté par la source de tension alternative de f.e.m. $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$. La fréquence du générateur est réglée de façon à avoir $L\omega = 1/C\omega = R$.

▶**1.** Déterminer toutes les caractéristiques de l'intensité du courant dans la résistance R. **A.N.** : $E = 20$ V, $R = 10\ \Omega$.

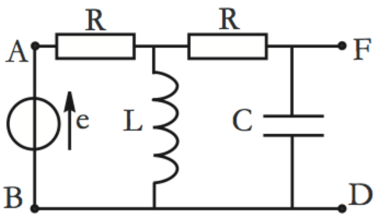


réponses : $i(t) = 0.686\cos(\omega t - 1.82)$A, où 1.82 rad = 104°.

Exercice 11 Modélisation de Thévenin

On considère le circuit suivant alimenté entre A et B par une source de tension alternative sinusoidale de f.e.m. : $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$

▶**1.** Déterminer les caractéristiques du générateur de tension (modèle de Thévenin) équivalent entre F et D sachant que ω est telle que : $LC\omega^2 = 1$ et $RC\omega = 1$



réponses : $\underline{E}_{th} = \frac{2-j}{5}\underline{E}$, ce qui donne $e_{th} = E\sqrt{2/5}\cos(\omega t - 0.464)A(-0.464rad = \arctan(-1/2)) = \arg(2-j))$
Cette f.e.m. est en série avec $\underline{Z}_{eq} = R_{eq} + \frac{1}{jC_{eq}\omega}$,
soit une résistance $R_{eq} = 3R/5$ en série avec une capacité $C_{eq} = 5C/4$.

Exercice 12 Modélisation d'un condensateur réel

On considère un diélectrique imparfait (isolant imparfait) de permittivité complexe $\underline{\epsilon} = \epsilon_0(x' - jx'')$, avec x' et x'' deux réels positifs. C'est l'isolant d'un condensateur de capacité $\underline{C} = \frac{\underline{\epsilon}}{\epsilon_0}C_0$. Ce condensateur est soumis à une tension sinusoidale $u(t) = U_m\cos(\omega t)$.

▶**1.** Exprimer l'impédance complexe du condensateur.

▶**2.** En déduire qu'on peut le considérer comme l'association d'un condensateur parfait de capacité C' et d'une résistance R' qu'on exprimera.

réponses : En choisissant R' et C' en parallèle, on a $R' = \frac{1}{x''C_0\omega}$ et $C' = C_0x'$.

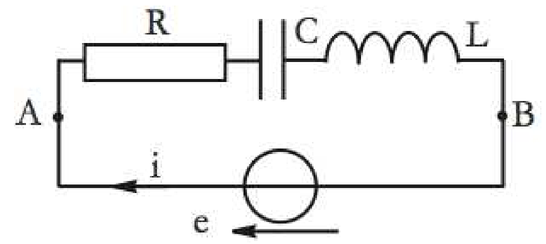
Exercice 13 Grandeur efficace

Calculer la valeur efficace S^{eff} de signaux périodiques alternatif 1) sinusoidal, 2) carré et 3) triangulaire en fonction de l'amplitude S^{max} du signal.

Exercice 14 Puissance électrique (1)

On donne $R = 10\Omega$, $L = 100\mu H$, $C = 200\mu F$, $\omega = 5.10^6$ rad.s^{-1}, $E_{eff} = 5$V.

▶**1.** Déterminer et calculer : l'impédance complexe du dipôle AB, le facteur de puissance et la puissance moyenne dissipée.



réponses : $\underline{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(L\omega/R-1/RC\omega)^2}}$, $<P> = \frac{E_{eff}^2}{R}\frac{1}{1+(L\omega/R-1/RC\omega)^2}$.

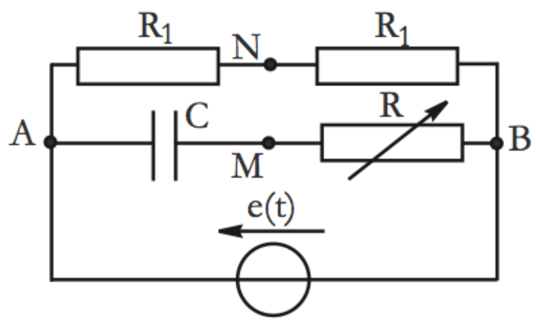
Exercice 15 Deux montages déphaseurs

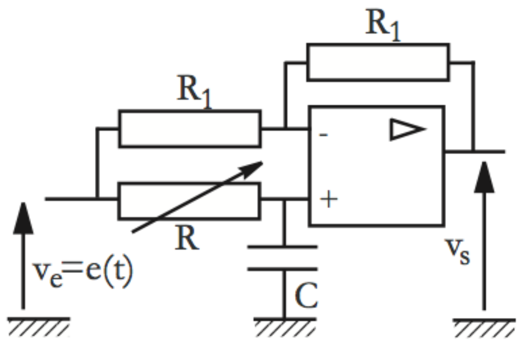
On considère les deux montages suivants alimentés par une tension alternative sinusoidale $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$. L'A.O. est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.

▶**1.** Dans le premier montage (avec pont), montrer que la tension enter N et M, $v = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, a une valeur efficace indépendante de ω. Calculer le déphasage φ et donner ses variations en fonction de R.

▶**2.** Dans le 2nd montage (avec A.O.), calculer la tension de sortie v_s. En déduire la valeur efficace de cette tension et le déphasage φ par rapport à v_e.

▶**3.** Quel rôle jouent ces deux montages ?





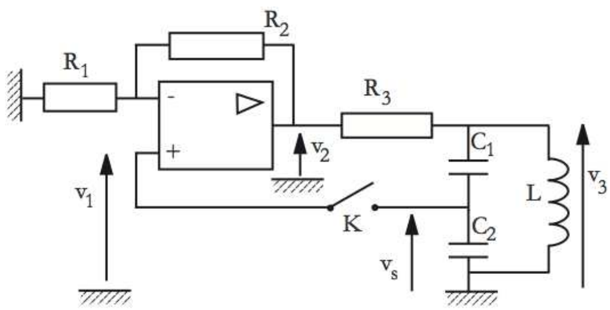
réponses : 1) $\underline{v}/\underline{e} = \frac{RCj\omega-1}{2(RCj\omega+1)}$. 2) $\underline{v_s}/\underline{v_e} = \frac{1-RCj\omega}{1+RCj\omega}$.

Exercice 16 Oscillateur avec A.O.

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

▶**1.** K est ouvert. Exprimer (en supposant que les tensions existent et sont sinusoidales) $\frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}}$, $\frac{\underline{V_3}}{\underline{V_2}}$, $\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_3}}$.

▶**2.** K est fermé. Déterminer les conditions pour que le montage soit un oscillateur de pulsation ω. Exprimer ω.



réponses : 1) $\frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{R_1+R_2}{R_1}$, $\frac{\underline{V_3}}{\underline{V_2}} = \frac{jL\omega/R_3}{jL\omega/R_3+(1-\frac{LC_1C_2}{C_1+C_2}\omega^2)}$, $\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_3}} = \frac{C_1}{C_1+C_2}$

2) Le courant dans la branche de K reste nul. Les relations de 1) restent donc valables et désormais $V_1 = V_s$. En multipliant les 3 relations de 1) entre elles, on trouve 1. Pour cela il faut $(R_1+R_2)/R_1 = (C_1+C_2)/C_1$ et on a $\omega^2 = (C_1+C_2)/(LC_1C_2)$.