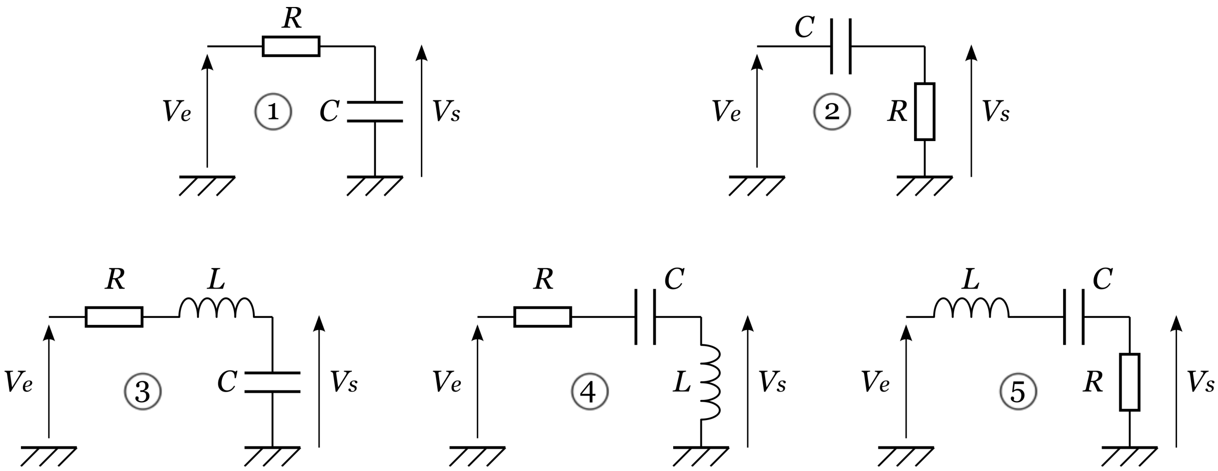
Exercice 1 Filtres linéaires passifs : application du cours



On considère les 5 filtres ci-dessus composés d'éléments passifs R, L et C. Pour chacun de ces filtres, donner :

▶**1.** l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ (notamment sous sa forme réduite : fréquence de coupure et/ou facteur de qualité) et l'ordre du filtre.

▶**2.** le comportement basses et hautes fréquences et en déduire la nature du filtre.

▶**3.** le diagramme de Bode pour le gain, l'expression de la bande passante à - 3 dB et décrire l'évolution du gain loin de la bande passante.

▶**4.** l'allure générale du déphasage.

Exercice 2 Filtre linéaire passif 1

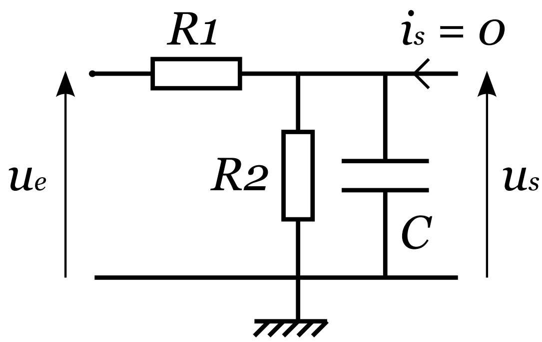
On considère le filtre de la figure suivante. On donne $C = 1.0\mu$F, $R_1 = 1.0$kΩ et $R_2 = 3.0$kΩ

▶**1.** Déterminer les comportements asymptotiques du filtre. En déduire sa nature.

▶**2.** Exprimer la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1+j\omega\tau}$. Exprimer la constante A_0 et la constante de temps τ.

▶**3.** Calculer la durée τ, la fréquence de coupure f_c, et le gain maximal G_{max}.

▶**4.** A l'entrée du filtre, on injecte la tension sinusoidale $u_e(t) = U_{em}\cos(2\pi f t)$ d'amplitude $U_{em} = 10$V et de fréquence $f = f_c/10$. Déterminer la tension $u_s(t)$ de sortie.



réponses : 2). $A_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2}$ et $\tau = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$ 3). $\tau = 0.75$ms, $f_c = 210$Hz et $G_{max} = -2.5$dB. 4). $u_s(t) = \frac{A_0U_{em}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos(2\pi f t + \alpha)$ avec $\alpha = -\arctan(\omega\tau)$, soit $u_s(t) = 7.5\cos(130t - 0.1)$ [V]

Exercice 3 Filtre linéaire actif et bilan de puissance

On considère le filtre ci-contre. Le dipôle placé en sortie est un résistor de résistance R_c. On donne $C = 0.1\mu$F, $R = 5.0$kΩ et $R_c = 0.5$kΩ. On suppose dans un premier temps que l'A.O. est idéal et fonctionne en régime linéaire.

►**1.** Déterminer les comportements asymptotiques du filtre. En déduire sa nature.

►**2.** Calculer la constante de temps τ du circuit RC.

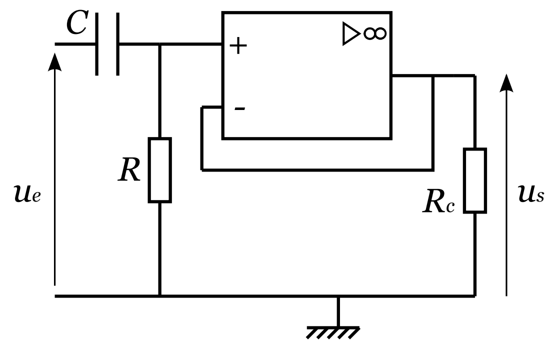
►**3.** Soit x la pulsation réduite avec $x = \omega/\omega_c = f/f_c = RC\omega$. Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite $\underline{H}(jx)$. Dépend-elle de la résistance de charge R_c ?

►**4.** Quelles sont la nature et l'ordre du filtre ? Calculer la fréquence de coupure f_c.

►**5.** On place en entrée un générateur idéal de tension $u_e(t) = E_m \cos(2\pi f t)$ avec $E_m = 2.0$V et de fréquence $f = f_c/2$. Déterminer la tension $u_s(t)$ et l'intensité $i_s(t)$ de sortie.

►**6.** Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}_c$ reçue par la charge. Quelle est la puissance moyenne $\mathcal{P}_+$ reçue à l'entrée de l'AO ? Que doit-on en conclure ?

►**7.** Dans la pratique, l'amplitude de l'intensité du courant de sortie est limitée à $I_{smax} = 20$mA et l'amplitude de la tension de sortie est limitée à $U_{smax} = 13$V par un système électronique interne à l'A.O. Déterminer :
- la valeur maximale U_{emax} de l'amplitude de la tension d'entrée
- la valeur R'_c de la résistance de charge quand les amplitudes de la tension et de l'intensité sont maximales.
- la valeur maximale $\mathcal{P}_{cmax}$ de la puissance moyenne de sortie de l'A.O. .



réponses : 3) $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1+jx}$. 5) $u_s(t) = \frac{E_m}{\sqrt{5}} \cos(2\pi f t + \alpha)$ avec $\alpha = \arctan(2)$.
6) $\mathcal{P}_c = \frac{(U_{smax}/\sqrt{2})^2}{R_c}$.

Exercice 4 Intégrateur et pseudo-intégrateur à AO

On considère le quadripôle actif 1. On donne $C = 1.0\mu$F, $R = 10$kΩ.

►**1.** Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. On posera $\tau = RC$.

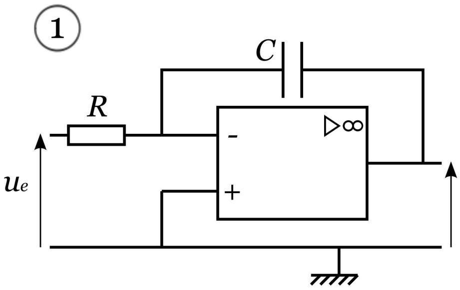
►**2.** Etablir l'équation différentielle (temporelle) reliant la tension de sortie à la tension d'entrée. En déduire que ce montage est un circuit intégrateur.

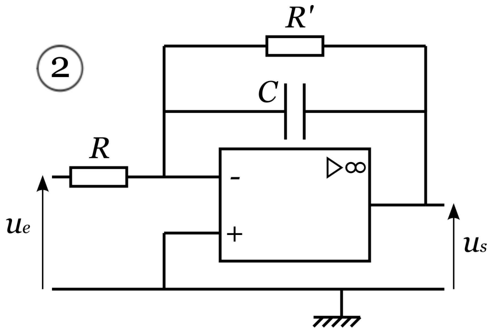
►**3.** A $t = 0$, on applique en entrée un échelon de tension de valeur $E = 1.0$mV. Déterminer la tension $u_s(t)$ de sortie sachant que le condensateur est initialement déchargé.

►**4.** L'AO sature pour une valeur de tension de sortie $U_{sat} = \pm 15$V. Quelle est la valeur de saturation atteinte par la tension de sortie de l'AO et à quel temps t_{sat} ?

►**5.** Dans la pratique, les tensions d'entrée s'écrivent sous la forme $u_e(t) = \epsilon + f(t)$, ϵ étant une tension constante appelée tension de décalage ; sa valeur peut être faible mais jamais nulle. Expliciter pourquoi ce montage ne peut fonctionner en intégrateur.

►**6.** La saturation de la tension de sortie peut être évitée en plaçant un résistor de résistance R' en parallèle avec le condensateur, comme indiqué sur le quadripôle 2.
- Exprimer la fonction de transfert sous la forme $\underline{T}(j\omega) = \frac{A_0}{1+j\omega\tau'}$, avec A_0 et τ' à exprimer.
- A quelle condition sur le produit $\omega\tau'$ le filtre a-t-il un caractère intégrateur ? On dit alors que c'est un pseudo-intégrateur.
- On considère que le filtre est intégrateur pour les fréquences supérieures à $10 f'_c$, f'_c étant la fréquence de coupure du filtre. Quelle valeur de R' fait-il choisir pour que le filtre soit intégrateur pour des fréquences supérieures à 100 Hz ?
- Quel est alors l'effet d'une tension de décalage $E = 20$mV ? Conclure.





réponses : 1) $\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{j\omega\tau}$. 3) $u_s(t) = -E\frac{t}{\tau}$. 4) $t_{sat} = 150\text{s}$.
6) $A_0 = -\frac{R'}{R}$ et $\tau' = R'C$, E entraîne une tension de décalage en sortie $U_s = -\frac{R'}{R}E = -1.6\text{mV}$.

Exercice 5 Quadripôle déphaseur

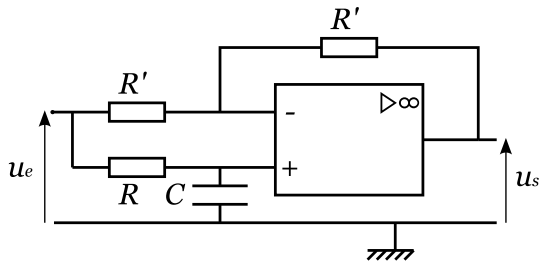
On considère le quadripôle ci-contre. On donne $C = 0.22\mu\text{F}$, $R = 47\text{k}\Omega$.

▶**1.** Exprimer la fonction de transfert.

▶**2.** Exprimer le gain et la phase du quadripôle. Quelle est la nature de ce quadripôle ?

▶**3.** Etablir l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée. On posera $\tau = RC$.

▶**4.** A $t = 0$ on applique en entrée un échelon de tension de valeur $E = 1.0\text{V}$. Déterminer la tension $u_s(t)$ de sortie sachant que le condensateur est initialement déchargé.



réponses : 1) $\underline{H}(j\omega) = \frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$. 3) $u_s + \tau\frac{du_s}{dt} = u_e - \tau\frac{du_e}{dt}$. 4) $u_s = E(1 - 2e^{-t/\tau})$.

Exercice 6 Filtre coupe-bande

On considère le quadripôle suivant. On donne $C = 10\mu\text{F}$, $L = 0.10\text{H}$, $R = r = 100\Omega$. On pose $R' = R + r$

▶**1.** Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit $R'LC$, la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q.

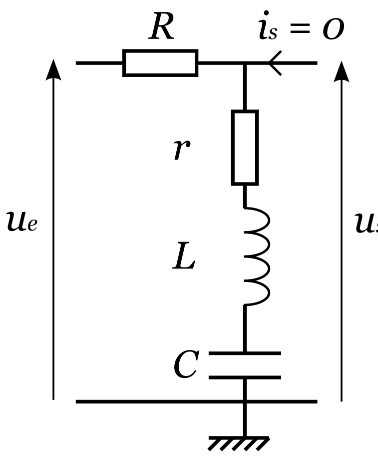
▶**2.** Déterminer les comportements asymptotiques à basse et haute fréquences. Peut-on en déduire la nature du quadripôle ?

▶**3.** Quelle est la valeur de l'impédance du dipôle LC à la fréquence propre ? En déduire le quadripôle équivalent au filtre à cette fréquence.

▶**4.** Calculer le gain du filtre à la fréquence propre.

▶**5.** On suppose désormais $r = R$. Soit x la pulsation réduite avec $x = \omega/\omega_0$. Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite $\underline{H}(jx)$

▶**6.** Exprimer le gain $G(x)$ en décibels et tracer l'allure de $G(x)$ en fonction de $\log(x)$.



réponses : 1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{L}{C}}$. 2) $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{r}{r+R}$. 5) $\underline{H}(j\omega) = \frac{1+jx+(jx)^2}{1+2jx+(jx)^2}$.

Exercice 7 Filtre passe-bande de Wien

On considère le quadripôle suivant. On donne $C = 0.10\mu\text{F}$ et $R = 1.0\text{k}\Omega$.

▶1. Déterminer les comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences. En déduire la nature du filtre.

▶2. Soit x la pulsation réduite définie par la relation $RC\omega = x$. Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite $\underline{H}(jx)$.

▶3. Calculer la valeur du facteur de qualité Q.

▶4. Montrer que la fonction de transfert se met sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{3 + j(x - 1/x)}$$

En déduire le gain en décibels maximal G_{max}.

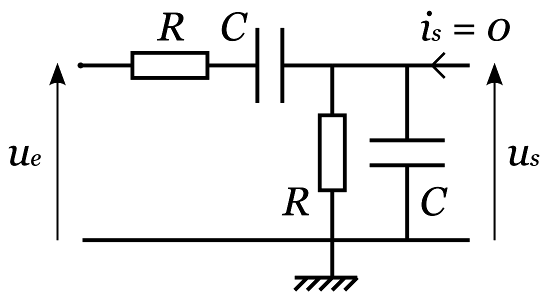
▶5. Calculer la fréquence caractéristique f_0 du filtre.

▶6. Déterminer la pulsation réduite x_1 de la borne inférieure et la pulsation réduite x_2 de la borne supérieure de la bande passante. En déduire les fréquences f_1 et f_2 correspondantes, puis sa bande passante Δf. Vérifier sa valeur à partir de son expression en fonction de Q.

▶7. Exprimer la phase $\varphi(x)$ de la fonction de transfert. Déterminer les phases $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$.

▶8. Tracer le diagramme de Bode.

▶9. Etablir l'équation différentielle (temporelle) reliant la tension $u_s(t)$ de sortie à la tension $u_e(t)$ d'entrée.



réponses : 3) $Q = 1/3$. 5) $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 1600Hz$. 6) $x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = 0.30$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.3$.
7) $\varphi(x) = -\arctan((x - 1/x)/3)$. 9) $\frac{d^2u_s}{dt^2} + 3\omega_0\frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \omega_0\frac{du_e}{dt}$.

Exercice 8 Tension triangulaire à l'entrée d'un filtre passe-bande

La courbe suivante est celle du gain $G(x)$ exprimé en décibels, d'un filtre de pulsation ω_r, en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_r$.

▶1. Quelle est la nature du filtre

▶2. Tracer les asymptotes. Quel est l'ordre du filtre.

▶3. La fonction de transfert réduite peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

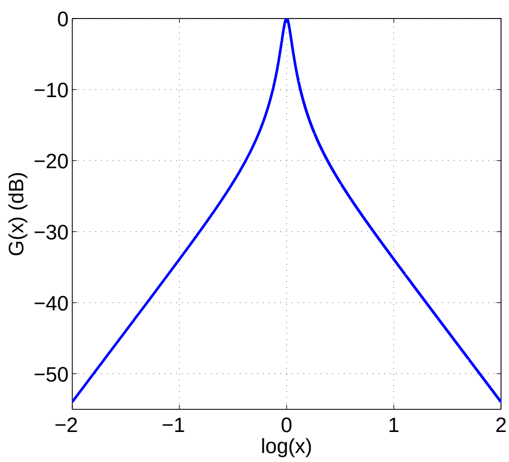
Déterminer graphiquement la constante A_0, et le facteur de qualité Q. On donne $\log(2) \simeq 0.3$.

▶4. On injecte en entrée une tension triangulaire positive de fréquence ω_r et d'amplitude 1.0 V d'expression :

$$u_e(t) = 0.5 + \frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\omega_r t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_r t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega_r t) + ...\right] \text{ (en volts)}$$

Déterminer la tension de sortie $u_s(t)$ en ne gardant que les termes pertinents.

▶5. Par un dispositif approprié, on triple la pulsation de résonance du filtre, toutes choses égales par ailleurs. Déterminer la tension de sortie $u_s'(t)$ en fonction de la pulsation réduite.



réponses : 3) On retrouve rapidement que les asymptotes se coupent en $(0\,;\,-20\log Q)$, soit $-20\log Q = -14$
4)En notation complexe, on a
$\underline{u_s} = \underline{H}(x=0)0.5 + \underline{H}(x=1)\frac{4}{\pi^2}e^{j\omega_r t} + \underline{H}(x=3)\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{9}e^{j3\omega_r t} + \underline{H}(x=5)\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{25}e^{j5\omega_r t}$. En évaluant les différents

termes, on observe que U_1 (amplitude de la composante $x = 1$) est largement supérieure aux autres contributions et $u_s(t) = \frac{4}{\pi^2}\cos(\omega_r t)$.
5) On fait de même et on obtient $U_0 = 0$, $U_1 = \frac{4}{\pi^2}\frac{3}{40}$, $U_3 = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{9}$ et $U_5 = \frac{4}{\pi^2}\frac{2}{525}$.
Soit $u'_s(t) = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{3}{40}\cos(\omega_r t + \pi/2) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_r t)\right]$

Exercice 9 Filtre 1

On consière le filtre de la figure suivante, v_{s1} étant la tension de sortie.

►**1.** Prévoir le comportement haute et basse fréquence de ce filtre. De quelle famille de filtre est-il voisin : passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande ?

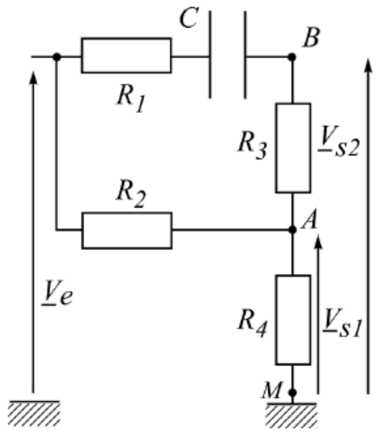
►**2.** On montre que la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{V}_{s1}}{\underline{V}_e}$ peut se mettre sous la forme $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1+j\tau_1\omega}{a+j\tau_2\omega}$. Donnez les expressions de a, τ_1 et τ_2.

►**3.** Dans toute la suite de l'exercice, on fera l'hypothèse que $\tau_1 \gg \frac{\tau_2}{a}$. Le gain en décibel du filtre sera noté $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ le déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée. Donner une expression approchée de $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ dans l'intervalle de pulsation $\omega \ll 1/\tau_1 \ll a/\tau_2$.

►**4.** Donner de même les expressions approchées dans l'intervalle de pulsation $1/\tau_1 \ll \omega \ll a/\tau_2$.

►**5.** Donner de même les expressions approchées dans l'intervalle de pulsation $1/\tau_1 \ll a/\tau_2 \ll \omega$.

►**6.** Exprimer la relation entre la fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{V}_{s2}}{\underline{V}_e}$ et $\underline{H}_1(j\omega)$ en fonction des éléments du circuit.



réponses : 5) $G_{dB}(\omega) \approx -20\log(a)$ et $\varphi \approx 0$.

Exercice 10 Filtre à structure de Rauch

On réalise un filtre à l'aide du montage suivant. L'AO est supposé idéal et en régime linéaire.

►**1.** En déterminant la tension de sortie du filtre à basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

►**2.** On étudie le régime harmonique permanent, l'AO étant supposé idéal. En appliquant la loi des noeuds en A et en B, trouver deux relations entre $\underline{e}$, $\underline{v}_A$, $\underline{v}_B$ et $\underline{v}_S$, où $\underline{v}_A$ et $\underline{v}_B$ désignent les potentiels complexes en A et B respectivement. Que vaut $\underline{v}_B$?

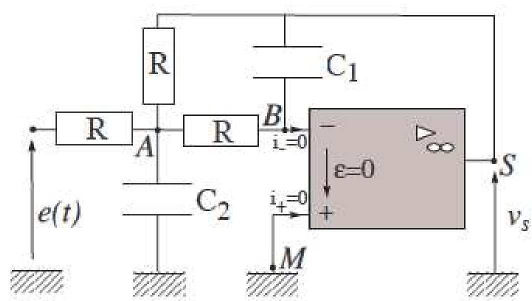
►**3.** En déduire la fonction de transfert du montage que l'on mettra sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2},$$

en déterminant H_0 ainsi que les expressions de ω_0 et m en fonction de R, C_1 et C_2.

►**4.** On souhaite obtenir une fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5$ Hz et un facteur d'amortissement $m = 1/\sqrt{2}$. On choisit $R = 470\Omega$. Calculer les valeurs des capacités C_1 et C_2.

►**5.** Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure des courbes réelles. On utilisera comme variable la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.



réponses : 2) $\underline{v}_A(3 + jRC_2\omega) = \underline{e} + \underline{v}_B + \underline{v}_S$ et $\underline{v}_B - \underline{v}_A = (\underline{v}_B - \underline{v}_S)jRC_1\omega$

3) $H_0 = -1$, $m = \frac{3}{2}\sqrt{C_1/C_2}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{RC_1RC_2}$

5) $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^4}}$. $\mathrm{Im}[\underline{H}] \leqslant 0$, donc $\arg[\underline{H}] = -\arccos(\frac{1-(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^4}})$