

Matière Molle et Biophysique

TD. Hydrodynamique-Microfluidique

1 Ecoulement de fluide par une micropompe capillaire

La microfluidique permet de manipuler et contrôler de très faibles quantités de liquide, typiquement quelques nanolitres. C'est un domaine en pleine expansion avec des applications telles que l'analyse biologique (par exemple, l'ADN dès 1996), la synthèse chimique, l'optique, Une micropompe est un dispositif gérant l'aspiration et le refoulement à l'échelle micrométrique d'un fluide comme le font les pompes traditionnelles aux échelles supérieures. Les micropompes capillaires exploitent la différence de pression qui apparaît à travers une interface liquide-gaz.

1.1 Principe de base

Nous étudions ici la puce microfluidique développée par l'équipe de Boisen au MIC (Fig. 1). Celle-ci est constituée de six réservoirs de liquide connectés deux par deux par des microcanaux. Au centre du dispositif, les microcanaux s'élargissent pour former les bio-capteurs sensibles à certaines molécules biologiques (ADN, protéines, ...). En effet, le bio-capteur central est enrobé avec des molécules biochimiques spécifiques qui peuvent réagir avec des molécules biologiques présentes dans une solution. Si une réaction apparaît, le capteur se déforme et la déformation est mesurée. En choisissant bien les molécules de l'enrobage, on peut faire un capteur spécifique à certaines molécules ciblées.

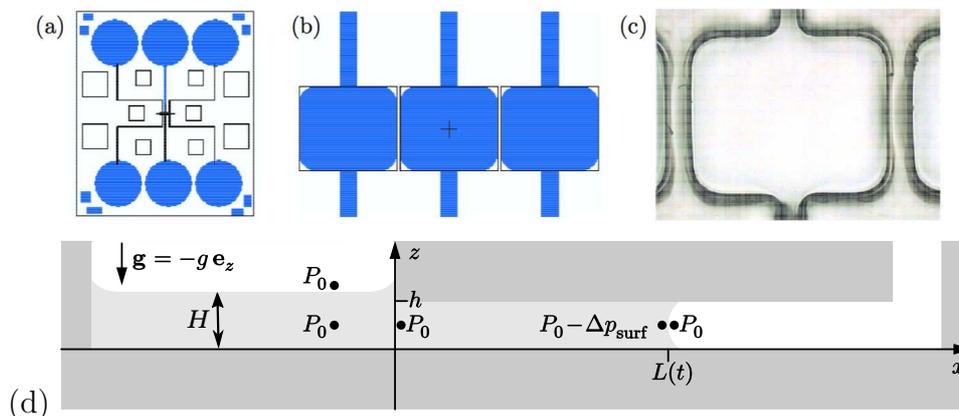


FIGURE 1 – (a-c) Bio-capteur fonctionnant sur le principe de la micropompe capillaire développé dans le groupe de Boisen au MIC. (a) la puce microfluidique fait $35\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ et contient 6 réservoirs circulaires de rayon 4 mm . Les réservoirs sont reliés deux par deux par des microcanaux. (b) Centre de la puce où les microcanaux s'élargissent pour former le bio-capteur de dimension $1.2 \times 1.0\text{ mm}$. (c) Image au microscope d'un bio-capteur central. (d) Schéma de principe de la micropompe avec un réservoir et un microcanal

On veut modéliser le principe de la micropompe capillaire et montrer que l'imbibition du liquide à travers les microcanaux ne nécessite pas d'apport d'énergie si les propriétés de mouillage sont bien choisies. Pour la suite on considère un seul réservoir, avec une hauteur de liquide H , connecté à un microcanal de section rectangulaire. Pour ce dernier,

la hauteur $h = 20 \mu\text{m}$ est supposée très petite devant la largeur $w = 200 \mu\text{m}$. L'angle de mouillage du liquide sur la paroi du canal (ou angle de Young-Dupré) est noté θ . La tension de surface liquide-gaz vaut $\gamma = 70 \text{ mN/m}$ et sa viscosité $\eta = 1.0 \text{ mPa.s}$.

1. Pour pouvoir fonctionner il faut que le liquide soit plutôt mouillant. Quelle est la contrainte sur la valeur de l'angle de mouillage θ ? Faites un schéma centré sur le ménisque et représentez l'angle de Young-Dupré. Dans la suite on prendra $\theta = 30^\circ$ et le liquide est aspiré spontanément dans le microcanal.
2. Justifiez que la chute de pression de Laplace de part et d'autre de l'interface liquide s'écrit $\Delta p_{surf} = \frac{2\gamma}{h} \cos \theta$.
3. Quelle est la contrainte sur la hauteur du réservoir H pour que l'effet de la gravité soit négligeable devant les effets capillaires? Quel est le nombre adimensionné associé? On prend $H = 200 \mu\text{m}$, que peut-on dire?
4. On note Q le débit du liquide qui imbibe le microcanal. En se basant sur des arguments d'analyse dimensionnelle et en supposant un écoulement de type Poiseuille, retrouvez le scaling pour Q en fonction de la hauteur du canal h , de la largeur du canal w , de la longueur imbibée du canal L , de la viscosité dynamique η et de la chute de pression ΔP entre l'entrée du canal ($x = 0$) et la position du ménisque $x = L$. Pour la suite on prendra comme préfacteur $1/12$, tel que donné par la loi de Poiseuille dans cette géométrie
5. Que vaut ΔP en fonction de la chute de pression de Laplace Δp_{surf} et de la pression atmosphérique P_0 ?
6. La vitesse du front est donnée par $dL(t)/dt$. Montrer que la longueur de canal imbibée $L(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{h^2 \Delta p_{surf}}{12\eta} \frac{1}{L(t)} \quad (1)$$

7. Résolvez l'équation différentielle et faites apparaître l'équivalent d'un coefficient de diffusion D .
8. La microcanal a une longueur totale $L_{tot} = 10 \text{ mm}$. Quel temps faut-il à la micro-pompe pour remplir tout le canal et apporter le liquide au bio-capteur?

1.2 Micropompe à deux gouttes

Dans leur article, Javadi et al. (Scientific Reports, 2013) présentent le principe d'une micropompe capillaire à deux gouttes (Fig. 2) : en reliant deux gouttes entre elles par un microcanal, ils quantifient un écoulement dans le microcanal dont le débit augmente avec la différence de rayon entre les deux gouttes. Pour simplifier, on supposera que le PDMS sur lequel repose les gouttes est totalement non mouillant et que les gouttes sont donc sphériques.

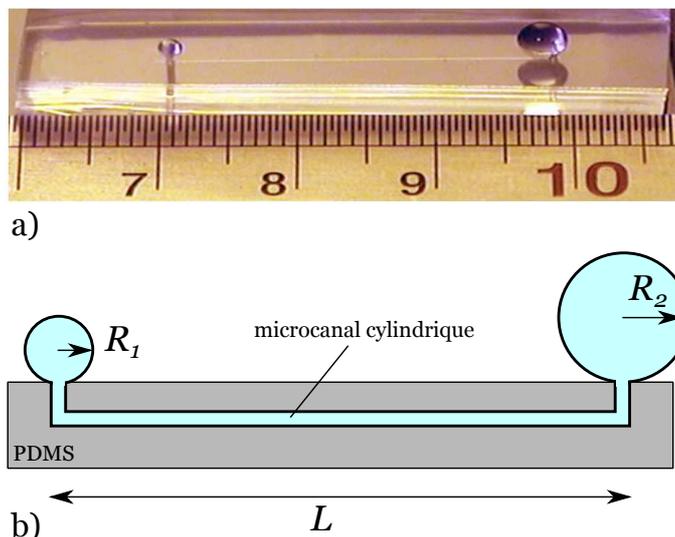


FIGURE 2 – Micropompe capillaire à deux gouttes (a) Système présenté par Javadi et al (Scientif Reports, 2013) (b) Représentation schématique. Le microcanal est cylindrique de rayon r .

On veut modéliser le principe de cette micropompe capillaire. On note R_1 le rayon de la petite goutte, R_2 celui de la grande. Le microcanal cylindrique a un rayon $r = 20\mu\text{m}$ et une longueur $L = 3.0\text{ cm}$. Le liquide est une solution aqueuse de viscosité $\eta = 1.0\text{ mPa}\cdot\text{s}$ et de tension de surface $\gamma = 0.030\text{ S.I.}$.

1. Expliquez le principe de cette micropompe. Quel est le moteur de l'écoulement ? Dans quel sens va-t-il se faire ? Comment varie le débit dans le temps ?
2. On note ΔP (comptée positivement) la différence de pression entre les deux extrémités du microcanal et Q le débit dans le microcanal. Exprimez le scaling de Q en fonction de r , L , ΔP et η (justifiez à partir d'une analyse dimensionnelle et/ou d'équations). Pour la suite, on vous donne le préfacteur : $\pi/8$.
3. Quelle est l'unité de la tension de surface γ dans le système international S.I. ? Quelle goutte est en surpression par rapport à l'autre ? Exprimez ΔP en fonction de γ , R_1 et R_2 .
4. Par conservation du volume, exprimez dR_1/dt et dR_2/dt en fonction de Q . En déduire le jeu de deux équations différentielles couplées qui régit la dynamique d'écoulement.
5. On suppose que $R_1 \ll R_2$ à tout moment, montrez que la dynamique du rayon de la goutte 1 s'écrit

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{r^4}{R_1(t)^3},$$

où τ est un temps caractéristique que l'on exprimera et quantifiera.

6. Résolvez $R_1(t)$. On donne $R_1(0) = 100\mu\text{m}$. Au bout de combien de temps la goutte disparaît-elle ?

1.3 Contrôle de l'écoulement par effet électro-capillaire

PAS TERMINE, EN L'ETAT. VOIR AUSSI ARTICLE SHABANI : Active surface tension driven micropump using droplet/meniscus pressure gradient

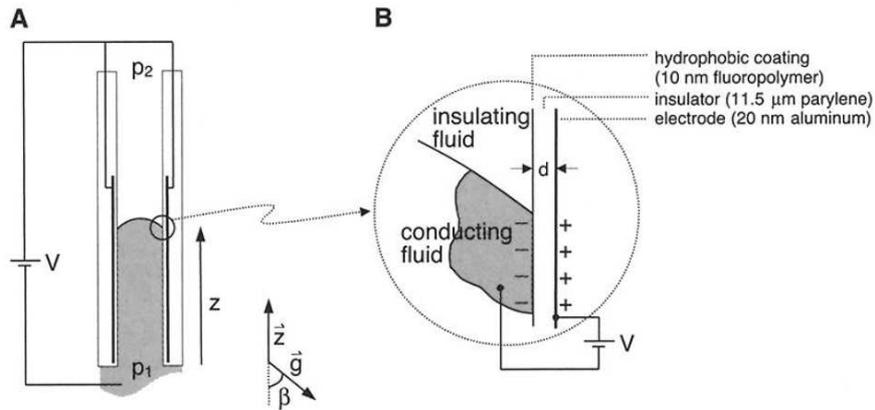


FIGURE 3 – On note d l'épaisseur de l'isolant électrique placé entre l'intérieur du canal et l'électrode, ainsi que ϵ_r sa perméabilité électrique relative.

Dans leur article (Science 2001) Prins et al. propose de contrôler l'écoulement par des effets électro-capillaires. En plaçant des électrodes dans le système microfluidique et en prenant un liquide relativement conducteur, on peut abaisser la tension de surface liquide-solide γ_{ls} comme

$$\gamma_{ls} = \gamma_{ls}^0 - \frac{CV^2}{2}, \quad (2)$$

où γ_{ls}^0 est la tension de surface liquide-solide en absence de champ électrique et $C = \epsilon_r \epsilon_0 / d$ est la capacitance de l'interface.

$$\Delta\gamma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V^2}{2d}, \quad (3)$$

avec d l'épaisseur de la couche d'isolant et V la tension électrique appliquée.

1.4 Correction : Principe de base

1. Le liquide est plutôt mouillant si $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Dans ce cas, il est énergétiquement favorable que le liquide couvre le plus possible de paroi. Le liquide est donc soumis à une force motrice le mettant en mouvement vers la droite.
2. Du fait de la courbure du ménisque, le liquide est en dépression du côté du liquide. On a donc $P_0 - P_\ell = \Delta p_{surf} = \gamma/r$, où r est le rayon de courbure du ménisque. D'après les dimensions du microcanal, la courbure est dominée par celle dans le plan du schéma (et négligeable dans le plan perpendiculaire). En faisant un bilan géométrique au niveau du point triple, on a $\sin(\pi - \theta - \pi/2) = \cos(\theta) = h/2r$, soit $\Delta p_{surf} = 2\gamma \cos(\theta)/h \sim 6060$ Pa.
3. On suppose $H \gg h$. Dans ce cas $P_1 - P_0 = \rho g H$. Différence de pression entre l'entrée du canal et ménisque donné par $P_1 - (P_0 - 2\gamma \cos(\theta)/h) = \rho g H + 2\gamma \cos(\theta)/h$. L'effet de la gravité sur la force motrice est négligeable si $\rho g H \ll 2\gamma \cos(\theta)/h$. On peut définir un nombre de bond $Bo = \rho g H h / \gamma$. La condition s'écrit alors $Bo \ll 2 \cos(\theta)$. Rq : en général, une seule échelle de longueur dans nombre de Bond. Ici on trouve $Bo \simeq 6 \cdot 10^{-4} \ll 1$.
4. $Q = vhw$ avec v la vitesse moyenne dans le canal. Le scaling de v est déduit de l'équation de Stokes qui détermine la forme du champ de vitesse. Soit $\Delta P/L \sim \eta v/h^2$ et $Q \sim \frac{\Delta P}{\eta} \frac{h^3 w}{L}$. Soit avec le prefacteur :

$$Q = \frac{1}{12} \frac{\Delta P}{\eta} \frac{h^3 w}{L}$$

5. $\Delta P = \Delta p_{surf}$
6. $Q = dL/dt \cdot h \cdot w$ soit $\frac{dL(t)}{dt} = \frac{h^2 \Delta p_{surf}}{12\eta} \frac{1}{L(t)}$
7. $dL/dt = D/L$. Avec $L(0) = 0$, on a $L(t) = \sqrt{2Dt}$. $D = \frac{h^2 \Delta p_{surf}}{12\eta}$ est équivalent à un coefficient de diffusion. $D \simeq 2 \cdot 10^{-7}$ m²/s.
8. $t_{tot} = L_{tot}^2 / 2D \simeq 250$ s.

2 Formation de bulles en microcanal

article source : Garstecki, Stone, Whitesides, Phys. Rev. Lett. 94, 164501 (2005).

L'exercice s'intéresse à un générateur de bulles microfluidique nommé Flow-Focusing Device (FFD) pouvant être traduit par générateur par focalisation d'écoulement. Le fonctionnement est représenté sur la Fig. 4 : une poche de gaz sous pression est forcée sur un orifice de dimension micrométrique. En même temps du liquide est injecté latéralement aux deux faces de la poche, ce qui va la pincer jusqu'à rupture et ainsi générer une bulle. Le processus se répète et conduit à des bulles de polydispersité en taille inférieure à 1%. On notera μ , ρ et γ respectivement pour la viscosité, la densité et la tension de surface du liquide, et q pour le débit de liquide. On notera p la surpression du gaz.

La dynamique de pincement est caractérisée sur la Fig. 5 et se décompose en trois phases : (b-c) le gaz envahit tout le canal, (d-f) le gaz est pincé et la largeur du pincement décroît linéairement dans le temps, (f-...) dynamique rapide conduisant à la rupture. Dans ce qui suit nous nous intéressons à la phase linéaire.

1. *Ordres de grandeur* : à partir des figures, évaluez les caractéristiques du générateur de bulles en termes de volume caractéristique et de fréquence de formation des bulles. Que vaut la vitesse de pincement dw_m/dt dans le régime linéaire (d à f sur Fig. 5) ?
2. Une question importante est de savoir si le pincement est lié ou non à une instabilité (capillaire de type Rayleigh-Plateau), c'est à dire que la géométrie de la poche serait intrinsèquement défavorable énergétiquement et générerait spontanément l'écoulement du liquide pour la pincer. Dans ce cas, la dynamique de pincement dépendrait de quatre paramètres : μ , ρ , γ et L (une longueur caractéristique).

Analyse dimensionnelle : en supposant que cet écoulement de pincement est a) soit inertiel, b) soit visqueux, donner une vitesse caractéristique (u_{inert} et u_{visq} respectivement). Montrer que dans le cas général, la vitesse caractéristique se met sous la forme.

$$u = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho L}} f(Oh)$$

où f est une fonction d'un nombre adimensionné Oh . Déterminer Oh .

Comparaison : calculer u_{inert} et u_{visq} et comparer à l'expérience (on prendra $L = 100\mu\text{m}$). En déduire que la géométrie est stable et que le moteur du pincement n'est pas une instabilité capillaire.

3. L'expérience montre que la vitesse de pincement est indépendante des caractéristiques du liquide (μ , ρ , γ , ce qui conforte l'analyse ci-dessus), mais dépend uniquement du débit imposé de liquide q . La Fig.6 montre que la dépendance est linéaire.

Quelle est la dimension et la valeur du coefficient de proportionnalité mesuré expérimentalement entre dw_m/dt et q ?

D'après les données ci-dessous, le mécanisme semble être géométrique. L'explication suivante est proposée : la poche de gaz bloque l'orifice. Il est alors plus simple pour le liquide de pincer la poche de gaz que de la contourner pour ressortir de l'orifice. En supposant que la phase linéaire est toujours dominante, exprimez alors la fréquence de formation des bulles en fonction de q . Application numérique avec les données de la Fig.5.

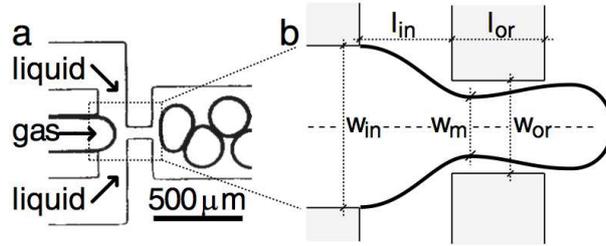


FIGURE 4 – (a) Microphotographie d'un FFD. Les canaux sont fabriqués en PDMS et ont une épaisseur h constante. (b) Représentation centrée sur l'orifice et l'interface liquide-gaz. Les zones ombragées correspondent au paroi de PDMS et la ligne en tiret correspond au plan de symétrie du canal. La figure définit les dimensions de la région de l'orifice : la largeur du canal d'injection du gaz ($w_{in} = 200\mu\text{m}$), la distance entre le canal d'injection du gaz et l'orifice ($l_{in} = 150\mu\text{m}$), et la largeur ($w_{or} = 60\mu\text{m}$) et longueur ($l_{or} = 100\mu\text{m}$) de l'orifice. On note $h = 50\mu\text{m}$ l'épaisseur du microcanal (3ème dimension). Pour l'analyse de rupture, on note w_m la largeur minimale de la poche de gaz.

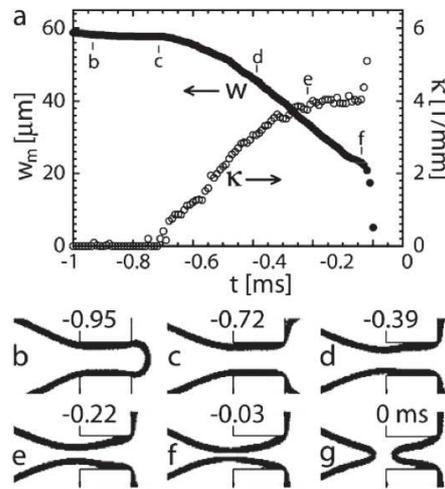


FIGURE 5 – (a) Evolution de la largeur minimale de la poche de gaz, et de la courbure axiale de l'interface gaz-liquide lors d'un évènement de rupture ($q = 0.56\mu\text{L/s}$, $p = 34.5\text{kPa}$, $\mu = 0.9\text{ mPa}\cdot\text{s}$, $\gamma = 28.7\text{ mN/m}$). (b-g) Micrographies de l'interface gaz-liquide montrant la dynamique de rupture. Les nombres donnent le temps. 0 correspond au moment de rupture de la poche de gaz.

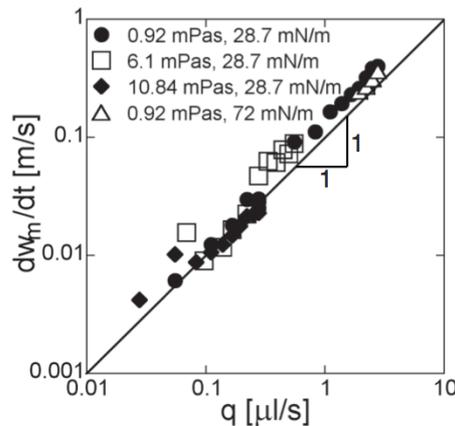


FIGURE 6 – (a) Tracé log-log de la vitesse de pincement (dw_m/dt) en fonction du débit d'alimentation en liquide q . Les valeurs de viscosité et tension de surface sont données dans la figure.

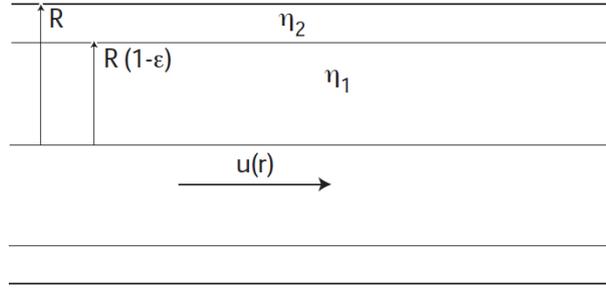


FIGURE 7 – Deux fluides non miscibles dans un microcanal de section circulaire

3 Écoulement de deux fluides non miscibles dans un microcanal (d'après Fermigier)

On étudie l'écoulement stationnaire co-axial de deux fluides non miscibles, de viscosités différentes η_1 et η_2 dans une microcanal de section circulaire. Le liquide 1 occupe le centre du tube ($0 < r < R(1-\epsilon)$) et le liquide 2 la périphérie (Fig. 7). On suppose que l'interface entre les deux liquides reste cylindrique au cours de l'écoulement et on néglige tous les effets liés à la tension interfaciale entre les deux fluides.

1. Rappeler l'expression de l'équation de Stokes pour un fluide de viscosité η en supposant que les effets de la gravité sont négligeables.
2. Les deux liquides sont mis en mouvement vers les z croissants par un gradient de pression $dP/dz = G < 0$. Montrer que le champ de vitesse est de la forme :

$$u = \frac{Gr^2}{4\eta} + A \ln r + B$$

dans chacun des liquides.

3. Quelles sont les conditions aux limites qui permettent de déterminer les constantes A et B pour chacun des liquides ? (2 conditions à l'interface entre les fluides 1 et 2).
4. On considère maintenant le cas où le liquide extérieur occupe une couche très mince le long de la paroi (c'est-à-dire dire $\epsilon \ll 1$). Montrer que les champs de vitesse sont alors :

$$u_1 = \frac{-G}{4\eta_1} \left[R^2 + 2R^2\epsilon \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1 \right) - r^2 \right]$$

et

$$u_2 = \frac{-G}{4\eta_2} (R^2 - r^2)$$

5. Représenter qualitativement le champ de vitesse lorsque le fluide le moins visqueux est à l'extérieur.
6. La présence d'une mince couche de fluide peu visqueux permet-elle d'augmenter le débit d'un fluide visqueux dans le canal, à gradient de pression donné ?
Donner une condition sur $\epsilon(\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1)$ pour commencer à voir cet effet.
7. On note Q_1 le débit du fluide 1 lubrifié par le fluide 2, et Q_1^0 le débit du fluide 1 sans présence de fluide lubrifiant. Calculer Q_1/Q_1^0 en supposant que la couche de lubrifiant est toujours très fine. On donne $\epsilon = 0.05$, $\eta_1 = 100$ mPa.s, $\eta_2 = 1$ mPa.s. Calculer le facteur d'augmentation de débit correspondant.

On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

4 Transition jet-goutte

Voir si possibilité de prolonger l'exercice précédent avec l'étude de la transition jet-goutte. Partir de l'article de Herrada : confined coaxial jets PRE2008.

Illustration à la fin avec double-emulsion ???

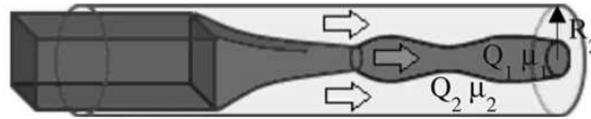


FIGURE 8 – Géométrie des deux fluides non miscibles dans un microcanal de section circulaire

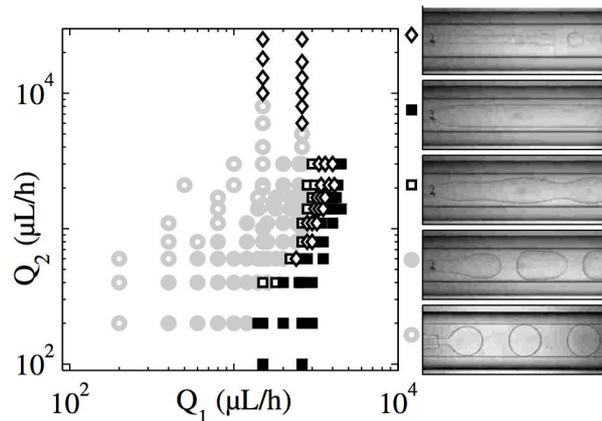


FIGURE 9 – Diagramme d'écoulement dans le plan (Q_1, Q_2) .

ou avec les micro-mousses. Voir article de B. Dollet et al. : Role of the channel geometry on the bubble pinch-off in flow-focusing devices, PRL 2008

5 Gouttes de Leidenfrost (d'après Fermigier)

Une expérience de cuisine. Eclaboussons une plaque de cuisson chauffée aux alentours de 150°C . Les petites gouttes d'eau ne tiennent pas en place, elles rebondissent à l'impact et dévalent la moindre pente. Ce phénomène de caléfaction, a été étudié par Leidenfrost à Berlin en 1756. Ce dernier a notamment mis en évidence l'existence d'une température optimale de la plaque pour observer la caléfaction.

Comment ça marche ? Lorsque le liquide approche la plaque brûlante, un film de vapeur vient s'intercaler entre la goutte et la plaque. La goutte lévite ainsi sur un coussin gazeux. Ce phénomène est éphémère car la goutte s'épuise peu à peu dans ce film de vapeur.

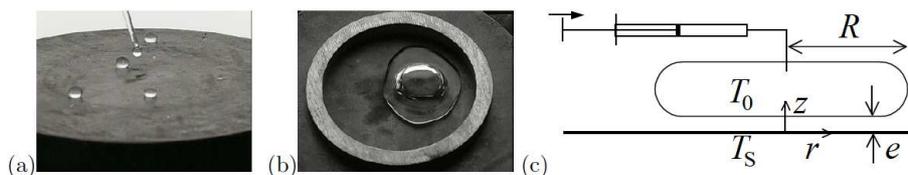


FIGURE 10 – (a) Phénomène de caléfaction : la goutte lévite sur un film de sa propre vapeur. (b) Des bulles apparaissent sous les flaques les plus étendues. (c) Flaque stationnaire alimentée de l'extérieur.

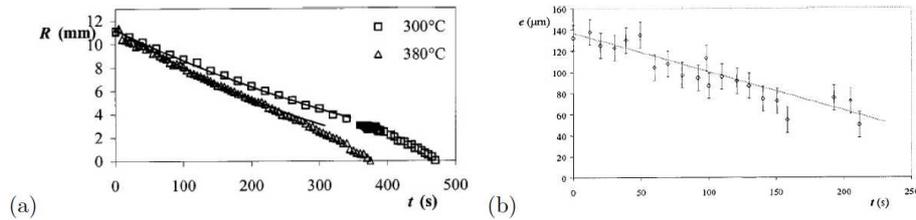


FIGURE 11 – (a) Mesure du rayon au cours du temps (les lignes en trait continu sont des paraboles). (b) Evolution de l'épaisseur en fonction du temps.

Ce phénomène peut être étudié en laboratoire en maintenant la goutte à l'intérieur d'une arène. On observe par exemple que des bulles apparaissent sous les grosses flaques. Nous nous focaliserons ici sur des flaques stables et stationnaires (il suffit d'alimenter la goutte afin de compenser son évaporation).

La température de la goutte T_0 est très proche de 100°C . On considère dans un premier temps que, tant que le film de vapeur est stable, il n'y a pas d'écoulement à l'intérieur de la goutte. L'épaisseur e du film (typiquement quelques dizaines de microns) est beaucoup plus petite que le rayon R de la flaque (typiquement quelques mm). Vu le confinement du film, on admettra que l'écoulement de vapeur se fait à nombre de Reynolds petit devant 1.

1. Evaluons la production de vapeur. Supposons que le transfert thermique se fait essentiellement par diffusion, ce que justifie la faible épaisseur du film. Montrer que le volume de vapeur créé par unité de temps et par unité de surface (c'est à dire la vitesse d'évaporation) est :

$$v_{evap} = \frac{\kappa \Delta T}{e} \frac{1}{\rho_v L}$$

où ΔT est la différence de température $T_s - T_0$, κ est la conductivité thermique de la vapeur, ρ_v sa masse volumique et L la chaleur latente de vaporisation.

2. Déterminons le profil des vitesses dans le film d'air. On considère la vapeur comme un fluide incompressible. Que peut-on dire des composantes horizontale et verticale de vitesse dans le film de vapeur? Quelles sont les conditions aux limites pour ce profil? En déduire l'expression de la vitesse radiale :

$$u(r, z) = -\frac{1}{2\eta_v} \frac{\partial p}{\partial r} z(e - z)$$

où z est la position verticale, mesurée à partir de la surface solide.

3. Intégrons le champ de pression sous la goutte. Déterminer le débit radial de vapeur $q(r)$. En déduire que le champ de pression dans le film de vapeur est donné par :

$$p(r) - p(R) = \frac{3\eta_v v_{evap} (R^2 - r^2)}{e^3}$$

4. Bouclons le problème. L'épaisseur h de la flaque vaut $2\ell_c$, où $\ell_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur capillaire. A partir de l'équilibre mécanique de la goutte, déterminer la vitesse d'évaporation v_{evap} et en déduire une relation entre l'épaisseur e du film et le rayon R de la goutte. Comment évoluent R et e en fonction du temps? Ces résultats vous paraissent-ils compatibles avec les mesures expérimentales?
5. Retour aux hypothèses. Comment peut-on estimer un ordre de grandeur de la vitesse de recirculation du liquide dans la flaque?

6. Bulles. Lorsque la flaqué est très étendue, le film de vapeur cesse d'être uniforme et des bulles apparaissent. Pourquoi? Qu'est-ce qui va fixer la taille de ces bulles et leur répartition?

Propriétés de l'eau à 100°C :

- masse volumique 960 kg/m³
- viscosité dynamique $\eta_e = 2.8 \cdot 10^{-4}$ Pa.s
- chaleur latente de vaporisation $L = 2.26$ kJ/g
- tension de surface $\gamma = 59$ mN.m⁻¹

Propriétés de la vapeur d'eau à 200°C :

- masse volumique $\rho_v = 0.5$ kg/m³
- viscosité dynamique $\eta_v = 1.6 \cdot 10^{-5}$ Pa.s
- conductivité thermique $\kappa = 0.03$ W.m⁻¹K⁻¹

6 Filet de miel (d'après Fermigier)

Il est assez difficile de sortir de l'eau d'un verre à l'aide d'un couteau tenu verticalement. En revanche, c'est tout à fait possible pour du miel liquide. Une fois tiré hors du pot, le miel y retombe si on maintient le couteau fixe (Fig. 12). Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à cet écoulement. Le miel liquide est un fluide newtonien de viscosité $\eta = 1$ Pa.s, masse volumique $\rho = 1000$ kg/m³.

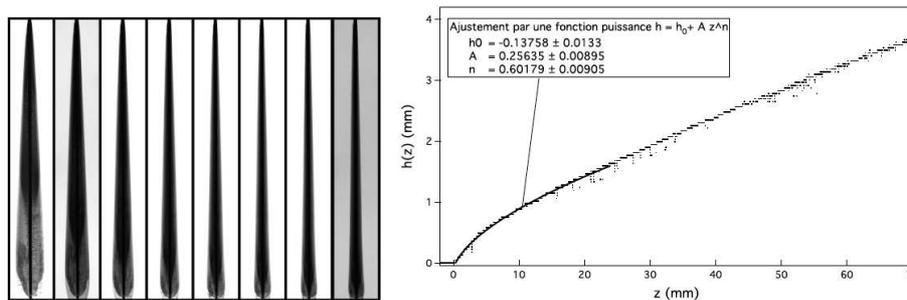


FIGURE 12 – Miel liquide tiré hors d'un pot par un couteau. à gauche, évolution de la couche de miel entraînée par le couteau (hauteur des images 10 cm, intervalle de temps 1s). à droite, profil de l'épaisseur de miel au début du drainage; points expérimentaux et ajustement par une loi de puissance sur le début de la courbe..

6.1 Ecoulement le long du couteau

On note $h(z, t)$ l'épaisseur du miel déposé le long du couteau. Justifier l'utilisation de l'approximation de lubrification dans ce problème.

1. Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de vitesse sur la surface du couteau ($x = 0$) et sur la surface libre ($x = h$) ?
2. Déterminer le champ de vitesse et la vitesse moyenne $\langle u \rangle$ dans la couche de miel.
3. Montrer que l'épaisseur locale $h(z, t)$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial \langle u \rangle h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

4. On cherche des solutions avec des variables séparées, de la forme : $h(z, t) = f(z)g(t)$. Quelle est alors la forme de la couche liquide et comment son épaisseur varie-t-elle avec le temps ?

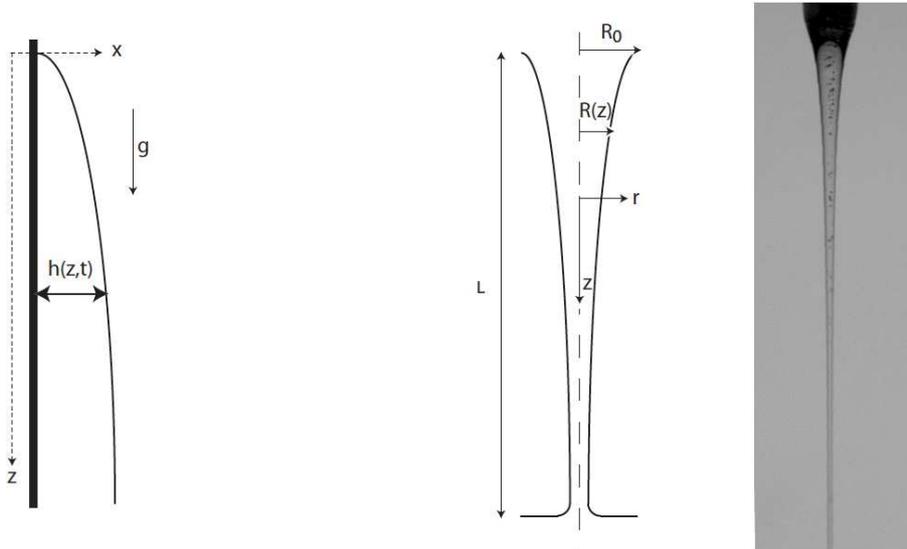


FIGURE 13 – Schémas de la couche de miel se drainant du couteau (à gauche), du filet de miel coulant sous le couteau (milieu).

6.2 Écoulement sous le couteau

Regardons maintenant le filet de miel de section circulaire qui s'écoule sous le couteau. Nous nous intéressons maintenant à une situation stationnaire où le débit de miel Q est constant. Le filet, dont le rayon initial est $R_0 \simeq 4$ mm, et la hauteur $L \simeq 10$ cm retombe dans le pot de miel. Dans un premier temps, négligeons la tension de surface du liquide.

1. Quelle est alors la pression à l'intérieur du filet de liquide? Pourquoi peut-on supposer que la vitesse du liquide est indépendante de la coordonnée radiale r ? Montrer que la vitesse du liquide $u(z)$ obéit à l'équation :

$$\eta \frac{d^2 u}{dz^2} = -\rho g$$

2. Donner l'évolution de la vitesse $u(z)$, en supposant qu'il n'y a pas d'étirement du liquide à l'endroit où le filet rejoint le bain. En déduire l'évolution du rayon $R(z)$ avec la position.
3. Considérons à présent l'effet de la tension interfaciale miel-air, $\gamma \simeq 50$ mN/m. Comment la tension interfaciale modifie-t-elle la pression dans le filet de liquide?
4. Montrer que l'équation de mouvement devient :

$$\eta \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{\gamma}{R^2} \frac{dR}{dz} - \rho g$$

5. Estimer l'ordre de grandeur relatif des termes de tension interfaciale et de gravité. Lequel est dominant?

7 Écoulement d'un coin de liquide sous gravité (d'après Fermigier)

L'écoulement sous gravité de couches de liquides visqueux est rencontré dans un certain nombre de situations géophysiques (écoulement de laves par exemple). On s'intéresse ici à une expérience modèle où on prépare un coin de liquide avec une surface libre faisant un petit angle α avec l'horizontale (Fig. 14). On se focalisera sur l'écoulement au voisinage de la pointe.

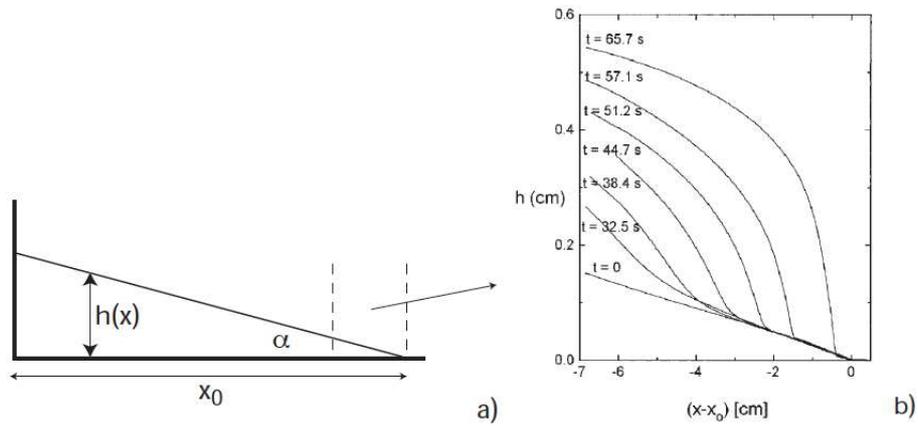


FIGURE 14 – a) Schéma du coin de liquide. b) Evolution du profil d'épaisseur à l'extrémité droite du coin de liquide, pour $\alpha = 0.02$ rad., $x_0 = 78$ cm et $\nu = 23$ cm²/s.

1. A partir des résultats expérimentaux de la Fig. 14b, déterminer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds de l'écoulement. Que peut-on en déduire sur la dynamique de l'écoulement ?
2. Comment se comparent les composantes horizontale et verticale de vitesse ?
3. Montrer que la répartition de pression dans la couche de liquide reste de type hydrostatique.
4. Quelles sont les conditions aux limites pour la composante horizontale de vitesse en $z = 0$ et $z = h(x)$?
5. Montrer que, dans les limite des petits angles α , et en négligeant les effets de la tension de surface, la hauteur de la couche de fluide est régie par l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{K\nu} g\alpha \right]$$

où K est un facteur numérique d'ordre unité que l'on ne calculera pas.

6. Comment varie initialement ($t = 0^+$) la hauteur de liquide ? Expliquer qualitativement l'évolution de h observée expérimentalement (Fig. 14).

8 Bigoutte filante (d'après Fermigier)

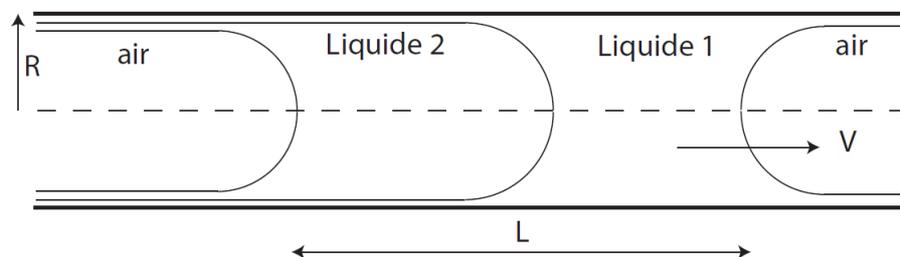


FIGURE 15 – Schéma d'une "bigoutte" de longueur L placée dans un tube capillaire

Marangoni a montré en 1871 qu'il est possible de choisir un couple de liquides de telle manière à se trouver dans la situation de "bigoutte filante" schématisée sur la fig. 15. Les deux liquides 1 et 2, de même viscosité dynamique η sont juxtaposés dans un tube capillaire de rayon R (R est de l'ordre de quelques dixièmes de mm). Leurs tensions superficielles sont respectivement γ_1 et γ_2 . La tension interfaciale entre les deux liquides

est γ_{12} . Les deux liquides mouillent complètement la surface du tube et laissent sur celui-ci des films d'épaisseurs très petites devant R . On pourra donc faire l'hypothèse que les rayons de courbure des trois ménisques sont égaux à R . La longueur L du train de liquides est beaucoup plus grande que R .

1. Caractérisation de l'écoulement de Poiseuille cylindrique On suppose un capillaire de rayon R et de longueur infini dans la direction z , dans lequel un fluide est mis en mouvement sous l'effet d'un gradient de vitesse dP/dz constant. On suppose l'écoulement de type visqueux. En utilisant la géométrie du problème, montrer que le champ de vitesse se ramène à $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$. Montrer que sous l'effet du gradient de pression dP/dz , le profil de vitesse se met alors sous la forme $v(r) = v_{max}(1 - (r/R)^2)$, avec v_{max} à déterminer. Calculer le débit et la vitesse moyenne V correspondante.
2. Montrer que la force exercée sur la bigoutte est $2\pi R(\gamma_1 - \gamma_{12} - \gamma_2)$
3. On constate expérimentalement que la bigoutte se déplace à une vitesse constante V . Quel est le champ de vitesse dans les deux liquides, loin des ménisques ?
4. Représenter graphiquement la répartition de pression le long du tube lorsque la bigoutte est en mouvement.
5. Donner l'expression de la vitesse V .
6. Application numérique : $\gamma_1 - \gamma_{12} - \gamma_2 \simeq 10 \cdot 10^{-3}$ N/m. $\eta \simeq 20\eta_{eau}$. $R = 0.1$ mm. $L = 1$ cm.

donnée : divergence d'un vecteur \vec{A} et laplacien d'un scalaire f en coordonnées cylindriques.

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

9 Ecoulement d'un film mince sur un plan incliné

Pour obtenir l'équation de Stokes et négliger le terme non linéaire convectif, nous avons supposé dans le cours que l'écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds très petit devant 1. Dans certaines géométries d'écoulements (dits "quasi-parallèles"), on peut néanmoins avoir le terme non linéaire négligeable devant le terme visqueux même si le nombre de Reynolds est plus grand que un. On dit que l'on se place alors dans l'**approximation de lubrification**. L'exercice suivant permet de se familiariser avec cette approximation et voir comment elle permet de simplifier les équations.

Hypothèses : L'écoulement est supposé incompressible. Le liquide est décrit par sa masse volumique ρ , sa viscosité dynamique η et sa viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ supposées constantes. Le champ de pesanteur terrestre \vec{g} est supposé uniforme avec $g = 9.8\text{m.s}^{-2}$. On note \vec{u} le champ de vitesse. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{u} \quad (4)$$

Une goutte de fluide s'écoule sur un plan incliné d'angle α . (cf Figure 16 pour la définition du repère Oxyz) en formant un film d'épaisseur $h(x, t)$ localisé entre $x = 0$ et $x = x_{av}(t)$. Le problème est invariant par translation selon \vec{e}_y et on a $u_y = 0$.

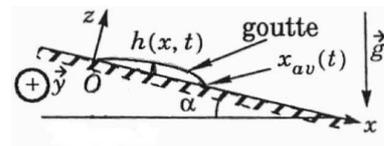


FIGURE 16 –

9.1

On note U^* une vitesse caractéristique selon \vec{e}_x , h^* une épaisseur caractéristique du film, et L^* une longueur caractéristique du film selon \vec{e}_x . L'hypothèse "film mince" (ou hypothèse de lubrification) se traduit a priori par la condition $h^* \ll L^*$, que l'on suppose vérifiée dans la suite.

1. Exprimer l'ordre de grandeur de u_z/u_x en fonction de L^* et h^* . Dans la suite, on supposera que $u_z \simeq 0$ dans l'équation 4.
2. Exprimer l'ordre de grandeur de $\partial^2 u_x / \partial z^2$, $\partial^2 u_x / \partial x^2$ et des composantes selon \vec{e}_x de $\nu\Delta\vec{u}$ et $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ en fonction de ν , U^* , L^* et h^* .
3. A quelle condition sur h^* , L^* , U^* et ν le terme d'accélération convective est-il négligeable devant le terme de viscosité dans l'équation 4? Cette condition est supposée vérifiée dans la suite.

9.2

On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires, ce qui revient à négliger $\partial\vec{u}/\partial t$ dans l'équation 4. Cette approximation sera justifiée a posteriori.

1. Projeter l'équation 4 sur \vec{e}_x et \vec{e}_z .
2. En déduire l'expression de la pression p en fonction de $h(x, t)$, ρ , g , z , α et de la pression p_0 imposée par l'atmosphère à l'interface liquide-air.
3. Justifier que la condition aux limites imposée par l'interface liquide-air s'écrit $\partial u_x / \partial z = 0$. Montrer que dans le cas où α n'est pas "trop petit", ce que l'on supposera dans la suite, on a :

$$u_x = \left(\frac{g \sin \alpha}{\nu} \right) \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) \quad (5)$$

Préciser l'inégalité entre $\tan \alpha$, L^* et h^* traduisant l'hypothèse "α pas trop petit".

4. Exprimer le débit volumique à travers la section d'épaisseur $h(x, t)$ et de largeur L selon \vec{e}_y en fonction de L , $h(x, t)$, g , α et ν .

5. Une expérience de la vie quotidienne : lorsque l'on incline rapidement un verre d'eau puis qu'on le repose en position verticale, un film d'eau apparaît, puis disparaît progressivement en s'écoulant vers le fond (Figure 17). En admettant que le film initial a une épaisseur uniforme h_0 et une hauteur $H = 10\text{cm}$ et qu'à la base du film, son épaisseur reste constamment égale à h_0 , déterminer la durée de vie T du film en fonction de ν , g , h_0 et calculer T pour $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $h_0 = 0.5\text{mm}$.

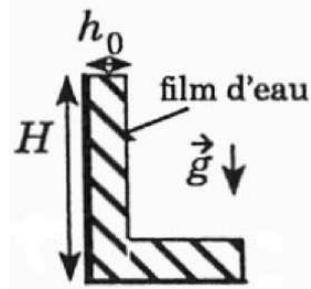


FIGURE 17 –

9.3 Retour au problème général

1. Montrer que $h(x, t)$ est solution de :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g \sin \alpha}{3\nu} \cdot \frac{\partial h^3}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

2. Dédire de l'équation 6 un ordre de grandeur de la durée τ^* caractéristique de l'évolution temporelle de l'écoulement en fonction de g , α , ν , h^* et L^* . Vérifier alors que l'hypothèse " $\partial \vec{u} / \partial t$ négligeable" dans l'équation 4 est valide.

9.4

Dans cette question, on suppose qu'à l'instant $t = 0$ une goutte de petite taille selon \vec{e}_x , de largeur L selon \vec{e}_y et invariante par translation selon \vec{e}_y est déposée au voisinage de $x = 0$. On note $x_{av}(t)$ l'abscisse du front avant de l'écoulement à l'instant t (Figure 16). On cherche une solution $h(x, t)$ de l'équation 6 sous la forme :

$$h(x > x_{av}) = 0 \text{ et } h(x < x_{av}) = Cx^\beta t^{-\gamma} \quad (7)$$

1. Déterminer les constantes positives β , γ et C , puis écrire $h(x, t)$ pour $x < x_{av}$.
2. Calculer l'aire S de la section de la goutte dans le plan (Oxz) en fonction de $x_{av}(t)$, g , ν , α et t . En déduire que $x_{av}(t)$ est proportionnel à t^δ où δ est un exposant à déterminer.

3. Le modèle adopté prévoit une discontinuité de h en $x_{av}(t)$. En réalité, les phénomènes de tension superficielle limitent la raideur du front avant. On admet que ces phénomènes sont associés à une énergie potentielle AS où $A > 0$ est le coefficient de tension superficielle et S l'aire de l'interface air-liquide. En comparant les deux formes de surface libre de la Figure 18, évaluer c en fonction de h et b puis justifier le rôle modérateur de la tension superficielle.

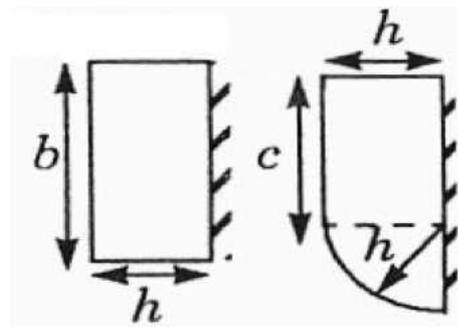


FIGURE 18 –