

Matière Molle et Biophysique

TD. Rhéologie

1 Fluides non newtoniens

Le modèle de fluide newtonien n'est pas pour décrire bon nombre de fluides qui ont un comportement sous écoulement plus complexe. On peut donner l'exemple du sang, de la mayonnaise, du gel coiffant ou de la mousse à raser. La définition d'un fluide newtonien est telle que les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse ($\sigma = \eta \dot{\gamma}$) et ce coefficient de proportionnalité (appelé viscosité dynamique) est indépendant du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$.

Par définition, un fluide non newtonien ou complexe admettra une relation contrainte-gradient de vitesse différente d'une simple relation de proportionnalité.

2 Ecoulement du sang dans un vaisseau

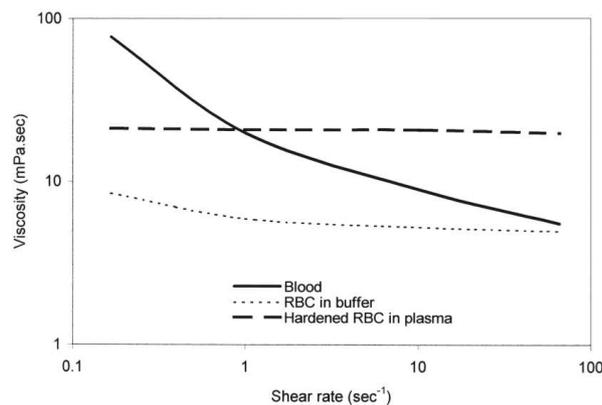


FIGURE 1 – Mesure de viscosité dynamique pour un échantillon de sang (trait plein). Un ajustement des points expérimentaux par un modèle de type Bingham donne $\sigma_s = 4.3$ mPa et $\eta = 4.8$ mPa.s.

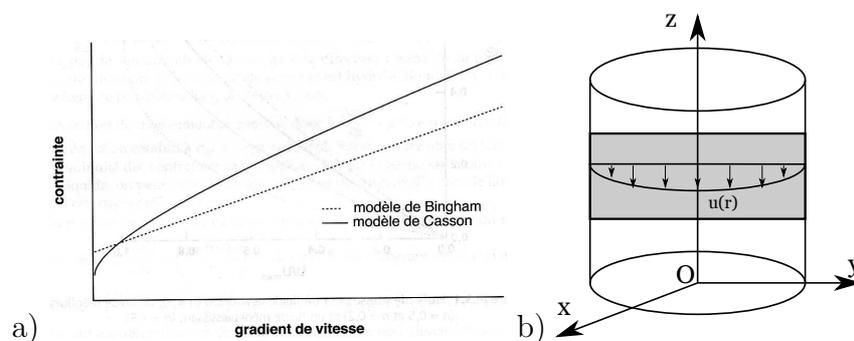


FIGURE 2 – a) Allure des rhéogrammes pour un fluide de Bingham et un fluide de Casson
b) Représentation et repère associé au capillaire cylindrique.

Le sang est une suspension de particules plus ou moins déformables (globules rouges, globules blancs, plaquettes) dispersées dans une solution de molécules organiques, protéines,

sels appelée plasma. Cette composition donne lieu à un comportement rhéologique non-newtonien ainsi que le montre les mesures de viscosité présentées sur la figure 1. Celui-ci dépend de paramètres tels que le taux d'hématocrites (pourcentage volumique de globules rouges), la viscosité du plasma, l'agrégation des globules rouges ou leur propriété de déformation. Les mesures mettent en évidence l'existence d'une contrainte seuil σ_s en dessous de laquelle le fluide ne s'écoule pas. Au-delà de la contrainte seuil, on peut représenter le comportement du fluide soit par une relation affine (fluide de Bingham) $\dot{\gamma} = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta}$ où $\dot{\gamma}$ est le gradient de vitesse, η la viscosité dynamique et σ la contrainte tangentielle, soit par une relation non affine plus réaliste (fluide de Casson) $\dot{\gamma} = \frac{(\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma_s})^2}{\eta_p}$ où η_p est la viscosité plastique. Les rhéogrammes correspondants sont présentés sur la figure 2.

Le problème de l'écoulement dans un vaisseau sanguin peut se ramener schématiquement à l'écoulement dans un pore cylindrique. Dans un premier temps, nous cherchons donc la relation débit-gradient de pression pour un écoulement de fluide de Bingham, caractérisé par une contrainte seuil σ_s , dans un tube circulaire de rayon R . Dans tout ce qui suit, on prendra les conventions (repère, orientation, notation) de la figure 2b, notamment $\vec{u} = u(r)\vec{e}_z$, avec $u(r)$ négatif pour un écoulement vers les z décroissants.

1) Montrez que le débit (compté positivement) est donné par $Q = \pi \int_{u(0)}^{u(R)} r^2 du$.

2) Le fluide est poussé vers les z décroissant par un gradient de pression $\nabla P = \Delta P/L$ positif et constant. Sans faire d'hypothèse sur la loi de comportement et en écrivant l'équilibre des forces sur un élément de volume cylindrique, de rayon r et de longueur L , centré sur l'axe du tube, déterminez l'expression de la contrainte tangentielle σ sur cet élément en fonction de r .

3) Montrez que si le fluide est caractérisé par une loi de comportement $\dot{\gamma} = f(\sigma)$, le débit est donné par

$$Q = \pi \frac{R^3}{\sigma_R^3} \int_0^{\sigma_R} \sigma^2 f(\sigma) d\sigma,$$

où σ_R est la contrainte tangentielle sur la paroi du tube (les 2 formules du débit écrites ci-dessus sont valables quelle que soit la loi de comportement du fluide). Pour cela on utilisera l'expression du gradient de vitesse dans la géométrie du problème : $du = \dot{\gamma} dr$.

4) On suppose que le sang est décrit par un fluide de Bingham. Montrez qu'en fonction de la valeur du ratio σ_R/σ_s , deux régimes différents sont observés. Montrez que, pour un gradient de pression donné, le fluide ne s'écoule que dans des tubes de rayon supérieur à un rayon critique R_c dont on donnera l'expression. Donner l'allure du champ de vitesse dans les 3 cas suivants : $R < R_c$, $R \gg R_c$ et $R \gtrsim R_c$.

5) On suppose que le capillaire remplit la condition $R \geq R_c$. Calculez le débit. On l'exprimera en fonction de Q_p et du ratio σ_R/σ_s , où Q_p désigne le débit du fluide équivalent de même viscosité mais sans contrainte seuil. Tracez l'allure de Q/Q_p en fonction de σ_R/σ_s (ou équivalent R/R_c).

6) On considère le sang dont les caractéristiques sont données sur la figure 1. On cherche à caractériser le débit dans les artérioles et les petits capillaires sanguins (voir tableau ci-dessous). Pour ces 2 systèmes, calculez R_c , R/R_c , Q_p et Q . Commentez.

	diamètre (μm)	ΔP (kPa)	longueur (mm)
artérioles	20	1.0	2.5
capillaires	9.0	0.24	0.86

3 Correction écoulement du sang dans un vaisseau

1) Par convention Q est positif et $u(r)$ est négatif pour un écoulement vers les z décroissants. On a donc

$$Q = - \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} u(r)rdrd\theta = -2\pi \int_{r=0}^R u(r)rdr$$

Or $d(ur^2) = u2rdr + r^2du$ soit $\int d(ur^2) = u(R)R^2 - u(0)*0^2 = \int_{r=0}^R u(r)2rdr + \int_{u(0)}^{u(R)} r^2du$.
Etant donnée la condition de non glissement à la paroi solide $u(R) = 0$ on trouve

$$Q = \pi \int_{u(0)}^{u(R)} r^2du$$

2) On fait le bilan sur un cylindre de rayon $r < R$ compris entre $z = 0$ et $z = L$. Le bilan des forces suivant z se compose d'une force normale de pression $\pi r^2(P(z = 0) - P(z = L))$ et d'une force tangentielle qui s'oppose au sens de l'écoulement, soit $2\pi rL\sigma$ suivant z . La somme de ces forces est nulle soit $\pi r^2(P(z = 0) - P(z = L)) + 2\pi rL\sigma = 0$ et

$$\sigma(r) = \nabla P.r/2$$

avec $\nabla P = (P(z = L) - P(z = 0))/L$.

3) D'après l'expression ci-dessus on a $r^2 = (2/\nabla P)^2\sigma^2$ et $du = \dot{\gamma}dr = f(\sigma)(2/\nabla P)d\sigma$. La contrainte sur la paroi du tube vaut $\sigma_R = \nabla P.R/2$ et $\sigma(0) = 0$. On a donc

$$Q = \pi(2/\nabla P)^3 \int_0^{\sigma_R} \sigma^2 f(\sigma)d\sigma = \pi(R/\sigma_R)^3 \int_0^{\sigma_R} \sigma^2 f(\sigma)d\sigma$$

4) Dans notre cas $\dot{\gamma} = f(\sigma) = 0$ si $\sigma < \sigma_s$ et $\dot{\gamma} = f(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta}$ si $\sigma > \sigma_s$. Deux cas se présentent. Si $\sigma_R < \sigma_s$ alors $f(\sigma)$ est nulle pour tout σ et $Q = 0$. Si $\sigma_R > \sigma_s$ alors $f(\sigma) = (\sigma - \sigma_s)/\eta$ pour $\sigma_s < \sigma < \sigma_R$. Cela revient à dire que l'écoulement est bouchon pour $0 < r < R_c = 2\sigma_s/\nabla P$ et est cisailé pour $R_c < r < R$. Dans la partie cisailée on a $du/dr = \frac{\nabla P}{2\eta}(r - R_c)$, soit

$$u(r) = \frac{\nabla P}{2\eta}(r^2/2 - R_c r - R^2/2 + R_c R)$$

en tenant compte de la condition $u(R) = 0$. Le profil est donc parabolique.

Dans la partie non cisailée en écoulement bouchon, la vitesse est homogène et vaut

$$u_b = u(R_c) = \frac{\nabla P}{4\eta}(R - R_c)^2$$

5)

$$Q = \pi(R/\sigma_R)^3 \int_{\sigma_s}^{\sigma_R} \sigma^2(\sigma - \sigma_s)/\eta d\sigma = \pi(R/\sigma_R)^3 \sigma_s^4/\eta \int_1^{\sigma_R/\sigma_s} x^2(x - 1)dx$$

en posant le changement de variable $x = \sigma/\sigma_s$.

$$Q = \pi(R/\sigma_R)^3 \sigma_s^4/\eta \left(\frac{(\sigma_R/\sigma_s)^4}{4} - \frac{(\sigma_R/\sigma_s)^3}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi R^3 \sigma_R}{4\eta} \left(1 - \frac{4(\sigma_s/\sigma_R)}{3} + \frac{(\sigma_s/\sigma_R)^4}{3} \right)$$

En posant $Q_p = \frac{\pi R^3 \sigma_R}{4\eta}$ le débit du fluide équivalent à contrainte seuil nulle, on peut écrire Q soit en fonction de σ_s/σ_R , soit en fonction de R_c/R de façon équivalente.

$$Q = Q_p \left(1 - \frac{4(\sigma_s/\sigma_R)}{3} + \frac{(\sigma_s/\sigma_R)^4}{3} \right) = Q_p \left(1 - \frac{4(R_c/R)}{3} + \frac{(R_c/R)^4}{3} \right)$$

On effectue le tracé sur la figure 3.

6) On complète le tableau

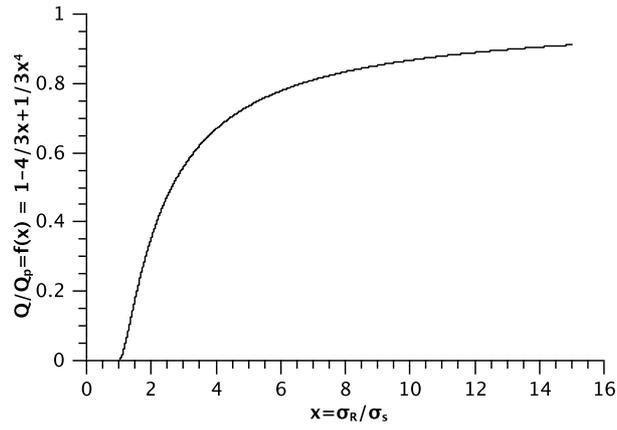


FIGURE 3 – Tracé de Q/Q_p en fonction de σ_R/σ_s ou R/R_c .

	R (μm)	ΔP (kPa)	L (mm)	σ_R (Pa)	R_c (μm)	Q_p (m^3/s)	$\sigma_R/\sigma_s = R/R_c$
artérioles	10	1.0	2.5	2	0.021	3.3×10^{-13}	465
capillaires	4.5	0.24	0.86	0.628	0.031	9.4×10^{-15}	146

$\sigma_R/\sigma_s \gg 1$ dans les deux cas, donc $Q \simeq Q_p$. Le corps impose un gradient de pression suffisant pour que le sang s'écoule avec le débit maximal et en étant cisailé partout.

4 Écoulement de laves

Les propriétés d'écoulement des laves varient fortement selon leur composition et leur contenu en gaz. Cependant, en première approximation, on peut utiliser un modèle rhéologique de Bingham, où la contrainte de cisaillement σ est reliée au gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ par la relation :

$$\sigma = \sigma_0 + \eta_p \dot{\gamma}$$

où σ_0 est la contrainte seuil d'écoulement et η_p est la viscosité plastique.

On décrit un écoulement de géométrie simple, l'épaisseur H de la coulée est constante et la pente α du terrain est également constante. L'écoulement est unidirectionnel, stationnaire.

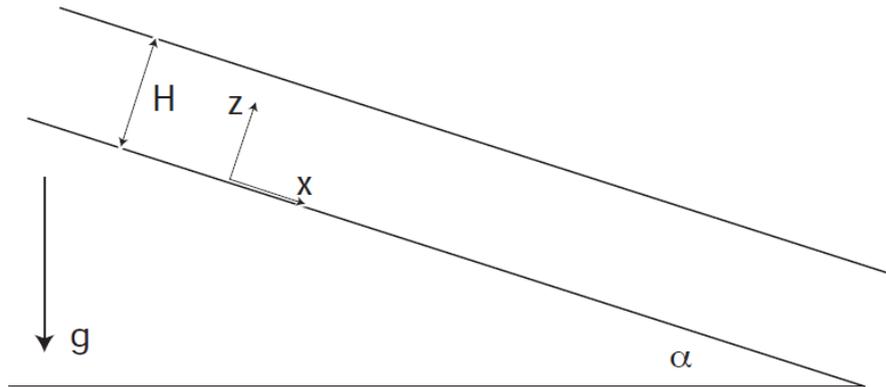


FIGURE 4 – Schéma de la coulée de lave

1. Montrer que la répartition de contrainte tangentielle dans la coulée est donnée par :

$$\sigma_{xz} = \rho g \sin \alpha (H - z)$$

où ρ est la masse volumique de la lave.

2. Quelle est l'épaisseur minimale de lave H_c au delà de laquelle la coulée avance ?
3. Déterminer le profil de vitesse $u_x(z)$ lorsque H est supérieur à H_c . Quelle est la forme de ce profil dans la limite H très légèrement supérieur à H_c ($(H - H_c)/H_c \ll 1$) et dans la limite H très grand devant H_c ?
4. Quels sont les régimes d'écoulement et la vitesse superficielle pour deux types de laves :
 - Lave basaltique hawaiienne : $\sigma_0 \approx 500\text{Pa}$, $\eta_p \approx 200\text{Pa.s}$, $\rho \approx 1200\text{kg/m}^3$, $H \approx 1\text{m}$, $\alpha \approx 10^\circ$
 - Andesite : $\sigma_0 \approx 10^5\text{Pa}$, $\eta_p \approx 10^7\text{Pa.s}$, $\rho \approx 2600\text{kg/m}^3$, $H \approx 100\text{m}$, $\alpha \approx 10^\circ$