Devoir de mécanique des fluides

exercice 1 : propagation d'ondes de surface

Section B : Paquets d'ondes, vitesse de groupe :

Dans cette section, on considère un phénomène ondulatoire en physique classique, en ne se restreignant plus aux ondes lumineuses (ondes mécaniques par exemple). Dans les parties **B.1.** et **B.2.** on se restreint pour simplifier à une description unidimensionnelle.
La grandeur physique qui se propage est notée $X(x, t)$ et est solution d'une équation d'onde linéaire à coefficients réels. On peut donc considérer que X est une superposition d'ondes planes harmoniques et utiliser la notation complexe :

$$\textbf{(4)} \qquad \begin{cases} X = \mathrm{Re}(\underline{X}) \\ \underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \exp\left(i\left(\omega t - k\, x\right)\right) d\omega \\ \underline{A}(\omega) = A(\omega) \exp\left(i\varphi(\omega)\right) \end{cases}$$

Le milieu de propagation est supposé purement dispersif, non absorbant, la propagation dans ce milieu est alors décrite par la relation $k(\omega)$.

B.1 : Description d'un paquet d'onde spectralement étroit, vitesse de groupe :

B.1.1 :

On considère d'abord le cas où la fonction $\underline{A}(\omega)$ n'a de valeurs notables en module qu'au voisinage de la pulsation ω_0 , sur un intervalle étroit $\left[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega\right]$ avec la restriction $\Delta\omega << \omega_0$.

a) En considérant le développement limité au premier ordre de la relation de dispersion $k(\omega)$ (resp. de la phase $\varphi(\omega)$) au voisinage de la pulsation ω_0 comme

une approximation suffisante de celle-ci, mettre l'expression de $\underline{X}$ sous la forme du produit d'une porteuse à la pulsation ω_0 par une amplitude complexe modulée de la forme $\underline{F}(t-\frac{x}{v_g})$ où on précisera l'expression de $\underline{F}$ et de v_g en fonction des données.

b) Illustrer le résultat obtenu sur un schéma simple et clair, et expliquer à quoi correspondent les vitesses de phase et de groupe.

B.1.2 :

a) Déterminer la position $x_C(t)$ du maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes.

b) Y a-t-il dans le cadre de cette modélisation déformation du paquet d'ondes lors de sa propagation ?

c) Comment généraliser qualitativement ces résultats à un paquet d'ondes spectralement large ?

B.2 : Interprétation interférentielle, stationnarité de la phase :

On se propose de retrouver les résultats précédents par une approche interférentielle. Pour cela, on note : $\psi(\omega,t,x)=\omega t-kx+\varphi(\omega)$ la phase de chaque onde constituant le paquet étudié, celui-ci étant toujours supposé spectralement étroit.

B.2.1 :

a) Établir que $x_C(t)$, défini en **B.1.2.a)** est donné par l'équation :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega}(\omega_0,t,x_C(t))=0 \qquad \textbf{(5)}$$

b) En interprétant l'expression intégrale donnée par **(4)** comme une interférence à ondes multiples, en déduire que le maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes est un lieu d'interférences « constructives », mais dont l'état instantané réel dépend de la phase de la porteuse. Pourquoi parle-t-on de stationnarité de la phase ?

B.2.2 :

a) Établir de même qu'un point donné de l'enveloppe d'abcisse $x_{env}(t)$ est décrit par l'équation :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega}(\omega_0,t,x_{env}(t))=C \qquad \textbf{(5')}$$

où C est une constante dépendant du point de l'enveloppe choisi.

b) Interpréter la différence entre $C=0$ et $C\neq 0$.

c) Montrer que pour le paquet de largeur spectrale totale $\Delta\omega_{total}=2\,\Delta\omega$ étudié ici,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right|=\frac{2\pi}{\Delta\omega_{total}} \qquad \textbf{(5'')}$$

définit à peu près les extrémités spatio-temporelles du paquet d'ondes.

B.2.3 :

a) En raisonnant à t fixé, et en exploitant **(5'')** , établir alors un lien simple entre la largeur spatiale totale du paquet Δx et sa largeur spectrale, puis réexprimer cette relation en faisant intervenir la largeur Δk_{total} en pulsations spatiales, que l'on exprimera en fonction de $\Delta\omega_{total}$ et de v_g.

b) En raisonnant de même à x fixé, déterminer la durée de passage du paquet, Δt , à un endroit donné en fonction de $\Delta\omega_{total}$

B.3 : Application au sillage des bateaux :

On s'intéresse ici à l'interprétation de la forme générale du sillage d'un bateau en eau profonde et par temps calme telle qu'elle a été donnée par Lord Kelvin en utilisant les idées qui précèdent.

B.3.1 :

a) Quelle est la nature des ondes qui interviennent dans un tel problème ? Quelle est la grandeur physique décrite par $X(x, t)$?

b) Pourquoi peut-on dans cette étude négliger l'influence de la tension superficielle ?

c) Sachant qu'on s'intéresse ici au sillage en eau profonde, montrer que la seule grandeur autre que k et ω qui peut intervenir dans la relation de dispersion est l'accélération de la pesanteur g ?

Vérifier, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, que l'on a la relation $\omega^2 = \mathrm{K}\, gk$ où K désigne un coefficient multiplicatif sans dimension.

d) Établir que quelle que soit la valeur de K on a $v_\varphi(\omega) = 2\, v_g(\omega)$ où v_φ (resp. v_g) représente la vitesse de phase (resp. de groupe). Dans la suite, on prendra K = 1.

B.3.2 :

On suppose que l'on peut considérer les ondes constituant le sillage comme un paquet bi-dimensionnel d'ondes planes de la forme $\underline{A}\exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}\right)\right)$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les surfaces d'onde (ici lignes, à deux dimensions) associées à l'onde de vecteur d'onde $\vec{k}_\alpha$, font l'angle α (variable) avec l'axe Ox support de la vitesse $\vec{U}$ de déplacement du bateau (vitesse supposée constante en direction et en module), $\vec{k}_\alpha$ étant perpendiculaire à ces surfaces (figure 6), son module $k_\alpha(\omega)$ vérifiant la relation de dispersion précédente.

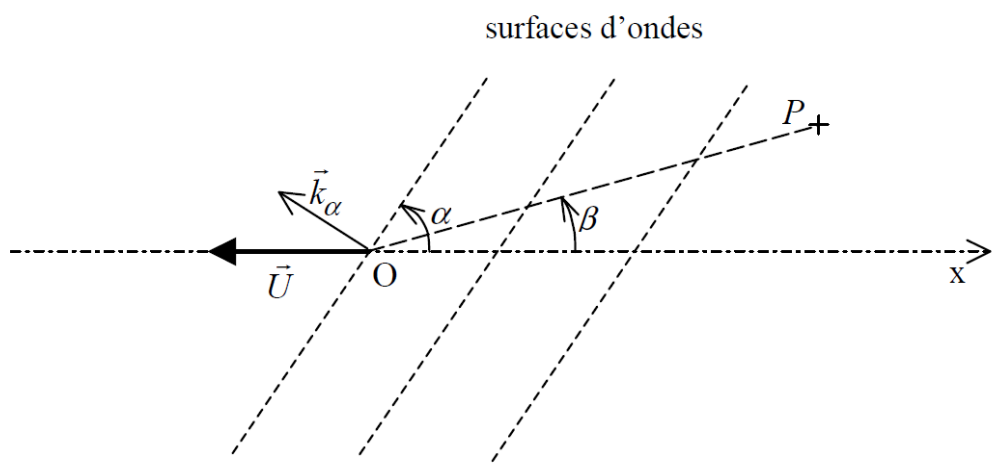


Figure 6

a) Ces ondes ayant pour source le point O situé à la proue (avant) du bateau, doivent pour être entretenues efficacement, recevoir le plus possible d'énergie de celui-ci. En déduire que la phase de ces ondes en O doit constamment valoir un multiple entier de 2π.

b) Comment sont alors ces ondes dans le référentiel lié au bateau ?

c) En déduire la relation : $$k_\alpha = \frac{g}{U^2 \sin^2 \alpha}$$

B.3.3 :

Pour que de telles ondes puissent par superposition donner en un point P (repéré par rapport à la proue par β, cf. figure 6) un ébranlement de la surface libre non nul, elles doivent interférer constructivement.

a) En utilisant la méthode étudiée en **B.2.1.** (stationnarité de la phase), en déduire alors la relation : $$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)}{2}$$

b) Cette relation conduit alors à l'expression de β en fonction de α (qu'on ne demande pas d'établir) : $$\tan(\beta) = \frac{\tan(\alpha)}{2 + \tan^2 \alpha}$$ dont la courbe représentative est donnée figure 7.

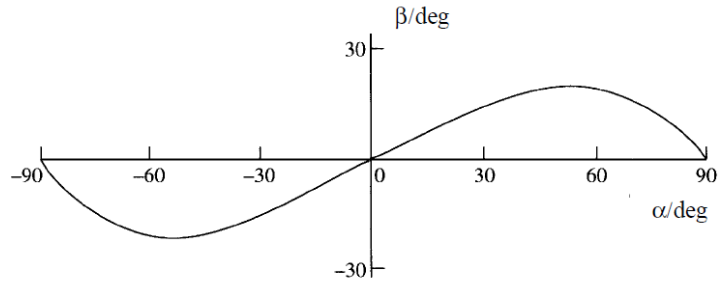


Figure 7

En déduire que le sillage est confiné à l'intérieur du cône de Kelvin dont on précisera l'angle au sommet. Ce cône dépend-il de la vitesse du bateau ?

c) L'allure des crêtes du sillage est donnée par la figure 8. Interpréter cette figure à l'aide d'une démarche interférentielle et de la courbe de la figure 7 (on n'oubliera pas que toutes les ondes considérées sont en phase au point O).

- On interprètera en particulier l'existence de plusieurs branches sur chaque crête.
- Ces crêtes peuvent-elles sur une photo donner accès à la vitesse du navire ?

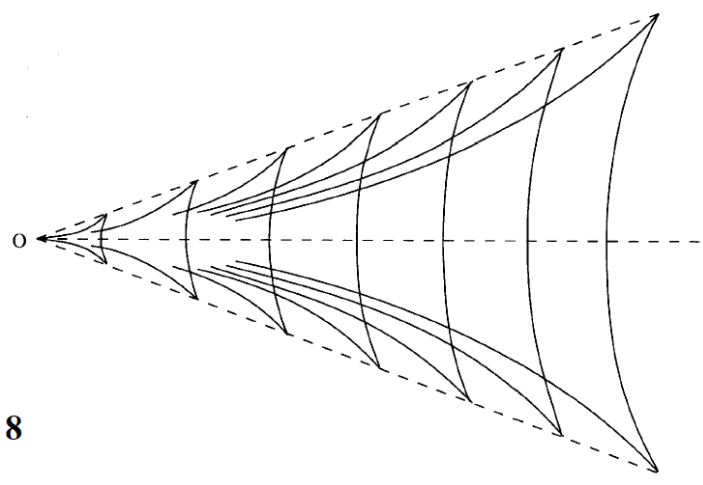


Figure 8

exercice 2 : écoulement d'un film mince sur un plan incliné

Si vous avez du mal à démarrer, vous pouvez vous aider des sections „approximation de lubrification“ ou „couches limites laminaires“ du Guyon, Hulin, Petit (hydrodynamique physique).

Hypothèses : L'écoulement est supposé incompressible. Le liquide est décrit par sa masse volumique ρ, sa viscosité η et sa viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ supposées constantes. Le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ est supposé uniforme avec $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On note $\vec{u}$ le champ des vitesses et $\vec{a}$ le champ des accélérations. L'équation du mouvement d'une particule de fluide s'écrit alors :

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,p + \nu\vec{\Delta}\vec{u} \qquad (1)$$

Une goutte de fluide visqueux s'écoule sur un plan incliné d'angle α (cf. figure 1 où sont définies les directions unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$) en formant un film d'épaisseur $h(x,t)$ localisé entre $x = 0$ et $x = x_{av}(t)$. Le problème est invariant par translation selon $\vec{e}_y$ et on a $u_y = 0$.

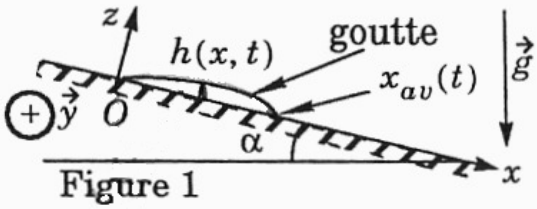


Figure 1

I.A - On note U^* une vitesse caractéristique selon $\vec{e}_x$, h^* une épaisseur caractéristique du film, et L^* une longueur caractéristique du film selon $\vec{e}_x$. L'hypothèse "film mince" se traduit a priori par la condition $h^* \ll L^*$, qu'on suppose vérifiée dans la suite.

I.A.1) Exprimer l'ordre de grandeur de u_z/u_x en fonction de L^* et h^*. Dans la suite, on supposera que $u_z \approx 0$ dans l'équation (1).

I.A.2) Exprimer l'ordre de grandeur de $\partial^2 u_x/\partial z^2$, $\partial^2 u_x/\partial x^2$ et des composantes selon $\vec{e}_x$ de $\nu\vec{\Delta}\vec{u}$ et $(\vec{u}\cdot grad)\vec{u}$ en fonction de ν, U^*, L^* et h^*.

I.A.3) À quelle condition sur h^*, L^*, U^*, et ν le terme d'accélération convective est-il négligeable devant le terme de viscosité dans l'équation (1) ? Cette condition est supposée vérifiée dans la suite.

I.B -

I.B.1) On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires, ce qui revient à négliger $\partial\vec{u}/\partial t$ dans l'équation (1). *Cette approximation sera justifiée a posteriori en* I.C.2. Projeter l'équation (1) sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$.

I.B.2) En déduire l'expression de la pression p en fonction de $h(x,t)$, ρ, g, z, α et de la pression p_0 imposée par l'atmosphère à l'interface liquide-air.

I.B.3) La condition aux limites imposées par l'interface liquide-air s'écrit $\partial u_x/\partial z = 0$. Montrer que dans le cas où α n'est pas trop petit, ce que l'on suppose dans la suite, on a :

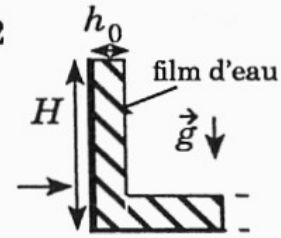
$$u_x = \left(\frac{g\sin\alpha}{\nu}\right)\left(hz - \frac{z^2}{2}\right) \qquad (2)$$

Préciser l'inégalité entre $\tan\alpha$, L^* et h^* traduisant l'hypothèse "α pas trop petit".

I.B.4) Exprimer le débit volumique à travers la section d'épaisseur $h(x,t)$ et de largeur L selon $\vec{e}_y$ en fonction de L, $h(x,t)$, g, α et ν.

I.B.5) Une expérience de la vie quotidienne : lorsqu'on incline rapidement un verre d'eau puis qu'on le repose en position verticale, un film d'eau apparaît, puis disparaît progresssivement en s'écoulant vers le fond (figure 2). En admettant que le film initial a une épaisseur uniforme h_0 et une hauteur $H = 10$ cm et qu'à la base du film, son épaisseur reste constamment égale à h_0, déterminer la durée de vie T du film en fonction de ν, g, h_0 et calculer T pour $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $h_0 = 0,5$ mm.

Figure 2



I.C - On revient au problème général

I.C.1) Montrer que $h(x,t)$ est solution de :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g\sin\alpha}{3\nu}\cdot\frac{\partial h^3}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

I.C.2) Déduire de l'équation (3) un ordre de grandeur de la durée τ^* caractéristique de l'évolution temporelle de l'écoulement en fonction de g, α, ν, h^* et L^*. Vérifier alors que l'hypothèse "$\partial\vec{u}/\partial t$ négligeable" dans l'équation (1) est valide.

I.D - Dans cette question, on suppose qu'à l'instant $t = 0$ une goutte de petite taille selon $\vec{e}_x$, de largeur L selon $\vec{e}_y$ et invariante par translation selon $\vec{e}_y$ est déposée au voisinage de $x = 0$. On note $x_{av}(t)$ l'abscisse du front avant de l'écoulement à l'instant t (figure 1). On cherche une solution $h(x,t)$ de l'équation (3) sous la forme :

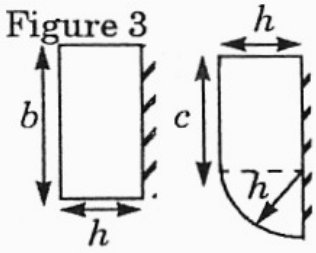
$$h(x > x_{av}) = 0 \text{ et } h(x < x_{av}) = Cx^{\beta}t^{-\gamma} \qquad (4)$$

I.D.1) Déterminer les constantes positives β, γ et C, puis écrire $h(x,t)$ pour $x < x_{av}$.

I.D.2) Calculer l'aire S de la section de la goutte dans le plan xOz en fonction de $x_{av}(t)$, g, ν, α et t. En déduire que $x_{av}(t)$ est proportionnel à t^{δ} où δ est un exposant à déterminer.

I.D.3) Le modèle adopté prévoit une discontinuité de h en $x_{av}(t)$. En réalité, les phénomènes de tension superficielle limitent la raideur du front avant. On admet que ces phénomènes sont associés à une énergie potentielle AS où $A > 0$ est le coefficient de tension superficielle et S l'aire de l'interface air-liquide. En comparant les deux formes de surface libre de la figure 3, évaluer c en fonction de h et b puis justifier le rôle modérateur de la tension superficielle.

Figure 3



exercice 3 : vidange d'un réservoir

Un grand réservoir est rempli d'un liquide de masse volumique μ. A la hauteur $h = 0,8$ m au-dessous de sa surface libre, un tuyau d'évacuation horizontal, de faible section et de longueur $a = 0,5$ m est fermé par une vanne V. On ouvre brusquement V à l'instant $t = 0$. A un instant t ultérieur, on admet que le niveau du réservoir ne varie pas et que la vitesse v est nulle dans tout le volume de celui-ci ; le long de la conduite, on a, *a priori*, $v = v(x,t)\,\mathbf{u}_x$, $0 < x < a$ désignant une abscisse comptée à partir de l'entrée de la conduite (figure 11.3).

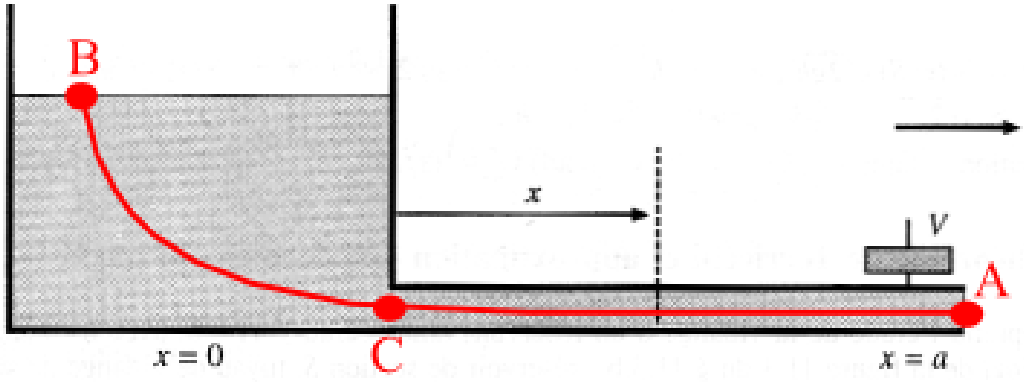


Fig. 11.3

- 1) Établir que v ne dépend pas de x.
- 2) Donner la valeur v_0 de v correspondant à $t \to \infty$. Application numérique avec $g = 10$ m.s^{-2}.
- 3) En utilisant une relation de Bernoulli , montrer que, à t donné, la pression P dans la conduite est une fonction affine de x.
- 4) Établir une équation différentielle décrivant l'évolution de $v(t)$. Intégrer celle-ci en posant $\tau = 2a\Big/\sqrt{2gh}$. Quelle est la signification physique du paramètre τ ? Calculer numériquement la durée T au bout de laquelle la vitesse dans la conduite ne diffère plus que de 1 % de sa valeur dans le régime permanent de vidange. Conclure en ce qui concerne un calcul de temps de vidange.

indice 4): Obtenir une relation entre B et C, les deux points sont supposés sur une même ligne de courant

On donne:

$$\frac{d}{du}tanh^{-1}(u) = \frac{1}{1-u^2}$$
$$tanh^{-1}(0) = 0,\ tanh(0) = 0,\ \lim_{u\to+\infty} tanh(u) = 1$$

Références

Ouvrages Prépa :

-collection HPrépa: Mécanique des fluides. 2ème année PC-PSI (dynamique)
Ondes. 2ème année PC-PSI (ondes et acoustique)

-collection taupe-niveau: Mécanique des fluides. Fiches, méthodes et problèmes corrigés (statique, dynamique, acoustique)

-collection TEC&DOC: Mécanique. 2ème année (dynamique)

Mécanique des fluides tous niveaux (Prépa -> Master) :

-Hydrodynamique physique.
Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit, éd EDP sciences

-Hydrodynamique physique, Problèmes résolus avec rappels de cours.
Marc Fermigier, éd. Dunod

Pour les curieux :

-Ce que disent les fluides
Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit, éd Belin

-Gouttes, bulles, perles et ondes
Pierre-Gilles de Gennes, Françoise Brochard-Wyart, David Quéré, éd Belin

Sur le web :

-National Committee for fluid mechanics films (vidéos en anglais)
http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html

-University of Iowa (vidéos en anglais)
http://www.iihr.uiowa.edu/products/dhrm.html

3 Formulaire mathématique

3.1 Le gradient

Définition : $df(\vec{M}) = \vec{\text{grad}} f(\vec{M}).d\vec{M}$

Conséquence : $\displaystyle\oiint_{\Sigma} f d\vec{S} = \iiint_{\vartheta} \vec{\text{grad}} f dV$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques:

$$\vec{\text{grad}}(f) = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

3.2 La divergence

Définition : $\displaystyle\oiint_{\Sigma} \vec{a}.d\vec{S} = \iiint_{\vartheta} \text{div}(\vec{a}) dV$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques:

$$\text{div}(\vec{a}) = \begin{cases} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (a_\varphi)}{\partial \varphi} \end{cases}$$

3.3 Le rotationnel

Définition : $\displaystyle\oint_{\Gamma} \vec{a}.d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}(\vec{a}).d\vec{S}$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} & - & \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} & - & \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} & - & \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta a_\varphi)}{\partial \theta} & - & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} & - & \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} & - & \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

3.4 Le laplacien scalaire

Définition : $\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques:

$$\Delta f = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{cases}$$

3.5 Le laplacien vectoriel

Définition : $\Delta\vec{a} = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{a}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{a})$
Expression en coordonnées cartésiennes:

$$\Delta\vec{a} = \left| \begin{array}{l} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{array} \right.$$

3.6 L'opérateur symbolique nabla $\vec{\nabla}$

En coordonnées cartésiennes, on peut noter, avec $\vec{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$:

$\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f$
$\vec{\nabla}.\vec{a} = \text{div}\vec{a}$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \vec{\text{rot}}\vec{a}$

3.7 Opérations sur les opérateurs vectoriels

$\vec{\text{grad}}(fg) = f\vec{\text{grad}}g + g\vec{\text{grad}}f$
$\text{div}(f\vec{a}) = f\text{div}\vec{a} + \vec{\text{grad}}f.\vec{a}$
$\vec{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\vec{\text{rot}}\vec{a} + \vec{\text{grad}}f \wedge \vec{a}$
$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{a}) = 0$
$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}f) = \vec{0}$
$(\vec{a}.\vec{\text{grad}})\vec{a} = \vec{\text{grad}}\frac{a^2}{2} - \vec{a} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{a}$