Le devoir est constitué de plusieurs exercices indépendants. Ils traitent différents chapitres du programme de mécanique des fluides au programme de l'agrégation : cinématique, modèle de fluide parfait, écoulement réel, acoustique.

Exercice 1 Cinématique : Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

►**1.** Montrer que le champ de vitesse en coordonnées sphériques $\vec{v}^s = \frac{D}{4\pi r^2}\vec{e}_r$ correspond à celui d'une source de fluide incompressible de débit D.

►**2.** Une source ponctuelle de fluide parfait incompressible, de débit volumique D constant, est placée dans un courant uniforme de vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_z$ de ce même fluide. Donner l'expression du vecteur vitesse correspondant à cette superposition en coordonnées sphériques.

►**3.** Donner les définitions d'un "point d'arrêt" et d'une "ligne de courant". Dessiner qualitativement l'allure des lignes de courant. Quelle expression mathématique utilise-t-on en général pour décrire une ligne de courant ? Montrer que les lignes de courant sont données par l'équation

$$(r\sin\theta)^2 = \frac{D}{2\pi v_0}\cos\theta + k,$$

où k est une constante caractérisant une ligne de courant donnée. Quelles sont les valeurs de k admissibles, en particulier décrire les lignes de courant correspondant aux valeurs minimale et maximale de k.

►**4.** Montrer que l'écoulement présente un point d'arrêt et donner sa position.

►**5.** Donner l'équation des lignes de courant repartant du point d'arrêt. Montrer qu'un solide de révolution, dont on précisera la géométrie, placé dans le courant uniforme ci-dessus conduit au même champ des vitesses pour le fluide.

Exercice 2 Modèle de fluide parfait : Implosion d'une bulle

Une sphère se dilate dans un fluide illimité, homogène, isotrope, de masse volumique ρ. L'écoulement du fluide généré par la dilatation de la sphère est supposé incompressible et décrit par le modèle de fluide parfait. A $t = 0$, le fluide est au repos. Le rayon de la sphère, $a(t)$, vaut initialement a_0. Dans tout l'exercice, on utilisera les coordonnées sphériques.

►**1.** En utilisant la condition d'incompréssibilité de l'écoulement, déterminer la vitesse v du fluide à un instant t, en un point M situé à la distance r ($r > a$) du centre de la sphère, en fonction de r, a et da/dt. Montrer que le mouvement du fluide est irrotationnel. Calculer l'énergie cinétique totale du fluide en fonction de ρ, a et da/dt.

►**2.** Il s'agit d'une bulle de vapeur d'eau qui implose ($da/dt < 0$) dans un grand volume d'eau liquide. La pression (de vapeur saturante) au sein de la bulle est négligeable à la température ambiante. La pression aux frontières du liquide (supposé infiniment étendu) est P_0 constante. On néglige l'influence du champ de pesanteur.

Calculer la puissance que les forces de pression fournissent au fluide contenu dans une sphère de rayon r, concentrique à la bulle, en fonction de la pression locale $p(r,t)$, a et da/dt. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système "ensemble du fluide", montrer que le rayon de la bulle, $a(t)$, satisfait l'équation différentielle : $a^3[2P_0/3\rho + (da/dt)^2] = cste$. En déduire da/dt en fonction de a, a_0, P_0 et ρ, en supposant que da/dt est nulle à $t = 0$. Calculer le temps T que mettra la bulle à disparaitre ; on posera $R = a/a_0$ et on donne :

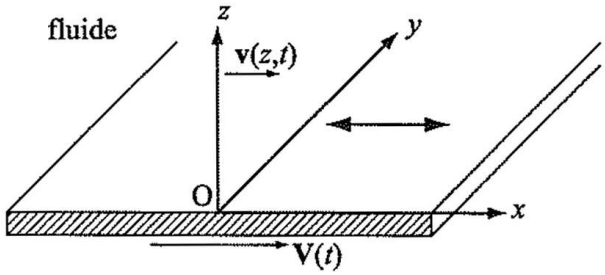
$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{R^3}{1-R^3}}dR = 0.74.$$

Application numérique : $\rho = 10^3\text{kg.m}^{-3}$; $a_0 = 1\text{mm}$; $P_0 = 10^5\text{Pa}$. Calculer T.

►**3.** On reprend la question précédente autrement. Ecrire l'équation d'Euler et donner ses hypothèses d'utilisation. L'intégrer entre $r = a$ et l'infini et établir une équation différentielle du second ordre vérifiée par $a(t)$. En posant $z(a) = (da/dt)^2$, se ramener à une équation différentielle en z et a. Intégrer cette équation et comparer à la question précédente.

Exercice 3 Ecoulement réel : Diffusion d'un cisaillement

Un fluide de viscosité η, de masse volumique ρ, occupe le demi-espace $z > 0$. Le fluide est en contact en $z = 0$ avec une surface plane illimitée horizontale qui effectue dans son plan xOy un mouvement sinusoidal selon Ox, de pulsation ω, tel que $\vec{V}(t) = a\cos(\omega t)\vec{e}_x$. On cherche le mouvement permanent induit dans le fluide. L'écoulement est supposé incompressible.



►**1.** Donner les arguments qui conduisent à prendre le champ de vitesse sous la forme : $\vec{v} = v(z,t)\vec{e}_x$.

►**2.** Ecrire l'équation de Navier-Stokes décrivant le mouvement du fluide et préciser les conditions aux limites. Montrer que v obéit à une équation de diffusion et chercher des solutions complexes de la forme :

$$\underline{v} = \underline{A}(z)e^{i\omega t}.$$

En déduire : $v(z,t) = Ae^{-k'z}\cos(\omega t - k'z + \varphi)$; exprimer les constantes A, k', φ.

►**3.** On appelle profondeur de pénétration λ la distance le long de l'axe Oz au bout de laquelle l'amplitude des oscillations de la vitesse du fluide est divisée par e. Donner la valeur de λ pour l'eau ($\eta = 10^{-3}$Pa.s) pour des fréquences f de 1 kHz et de 1 MHz.

►**4.** Calculer la force de frottement agissant sur l'unité de surface du plan solide et la puissance moyenne par unité de surface fournie par la surface solide au fluide pour maintenir le mouvement permanent.

►**5.** Décrire un autre phénomène physique qui relève des mêmes équations, et décrire une situation qui conduit à une solution de la même forme que celle donnée plus haut.

Exercice 4 Ecoulements réels : Viscosimètre à bille

Au cours de ses expériences sur la mesure de la charge de l'électron, Millikan appliqua la formule de Stokes à des gouttelettes d'huile (rayon R, masse m) tombant dans l'air sous l'action de la pesanteur ($g = 9.81$ N.kg^{-1}). On note $\rho_0 = 1.29$kg.m^{-3} la masse volumique de l'air, $\rho = 900$kg.m^{-3} la masse volumique de l'huile, $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1} la viscosité dynamique de l'air.

►**1.** A partir d'une analyse dimensionnelle, retrouver l'expression de la force qui s'applique sur la gouttelette (formule de Stokes) en fonction de η, R et v (vitesse de la gouttelette par rapport à l'air). Pour la suite on tiendra compte du facteur numérique valant 6π dans cette formule.

►**2.** Calculer la vitesse limite v_l de chute puis construire et donner l'expression du nombre de Reynolds R_e associé

►**3.** La formule de Stokes n'est applicable que si $R_e << 1$. En déduire que le rayon des gouttelettes doit rester très inférieur à une limite que l'on calculera en fonction de η, g, ρ_0 et ρ. Faire l'application numérique.

►**4.** Mêmes questions pour des gouttes de mercure qui tombent en chute libre dans l'eau (on tiendra compte de la poussée d'Archimède). On donne $\rho_0 = 1000$kg.m^{-3} pour l'eau, $\rho = 13600$kg.m^{-3} pour le mercure et, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ kg.m^{-1}.s^{-1} pour l'eau. Faire l'application numérique.

Exercice 5 Acoustique : rayonnement d'une onde sonore

A On considère une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant vers les x croissants dans un fluide initialement au repos. On note ρ_0 la densité au repos du fluide. La vitesse prend la forme $v = v_0 \cos(k.x - \omega t + \varphi)$.

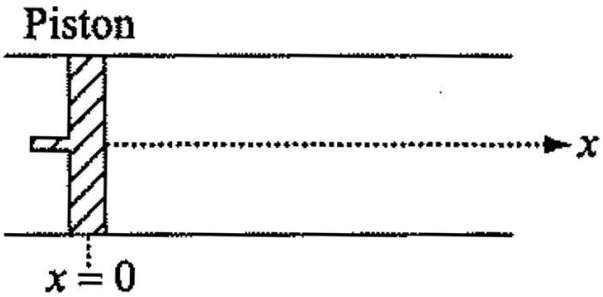
►**1.** Définir une OPPH.

►**2.** Quelles relations existent entre k (vecteur d'onde), λ (longueur d'onde), T (période), ω (pulsation) et c (vitesse de l'onde) ?

►**3.** A quelle condition portant sur v_0 et c le terme convectif $\rho(v.\text{grad})v$ de l'accélération dans l'équation d'Euler est-il négligeable devant le terme d'accélération local $\rho\partial v/\partial t$? De quelle approximation parle-t-on alors ?

►**4.** La surpression p prend aussi la forme d'une OPPH, $p = p_0 \cos(k.x - \omega t + \psi)$. En partant de l'équation d'Euler, exprimer une relation de proportionnalité entre v et p. Qu'appelle-t-on impédance acoustique Z ? Exprimer Z en fonction de c et ρ_0.

B On considère un tuyau cylindrique illimité d'axe Ox de section constante rempli d'air de pression P_0 et de masse volumique ρ_0 au repos. On note c la célérité du son. Le tuyau est parcouru par une onde plane progressive harmonique (OPPH) dans le sens des x croissants de pulsation ω et de longueur d'onde λ. Cette OPPH est générée par un piston de masse m de section Σ, mobile sans frottement, qui effectue des oscillations autour de $x = 0$ d'équation $\xi = A\sin(\omega t)$ $(A > 0)$.



►**1.** Quelle est la condition portant sur A et λ pour que l'approximation acoustique soit applicable ? On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

►**2.** Calculer la puissance moyenne P des forces pressantes exercées par la face du piston sur le gaz situé dans la partie $x > 0$. Cette puissance se met sous la forme :

$$P = Z_R \left\langle \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \right\rangle,$$

Z_R est appelée impédance de rayonnement. Déterminer Z_R en fonction de ρ_0, Σ, c et justifier cette appellation.

►**3.** Le piston est la partie mobile d'un oscillateur harmonique entretenu, on supprime la source d'entretien des oscillations. On suppose que l'amortissement est faible et uniquement dû à l'onde sonore générée vers les x croissants. Comment s'effectue le retour du piston à l'équilibre ? Evaluer la constante de temps de relaxation.

1 Formulaire mathématique

1.1 Le gradient

Définition : $df(\vec{M}) = \vec{\text{grad}} f(\vec{M}).d\vec{M}$

Conséquence : $\oiint_{\Sigma} f d\vec{S} = \iiint_{\vartheta} \vec{\text{grad}} f dV$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

1.2 La divergence

Définition : $\oiint_{\Sigma} \vec{a}.d\vec{S} = \iiint_{\vartheta} \text{div}(\vec{a}) dV$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques :

$$\text{div}(\vec{a}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (a_\varphi)}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

1.3 Le rotationnel

Définition : $\oint_{\Gamma} \vec{a}.d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}(\vec{a}).d\vec{S}$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} & - & \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} & - & \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} & - & \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta a_\varphi)}{\partial \theta} & - & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} & - & \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} & - & \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

1.4 Le laplacien scalaire

Définition : $\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$

Expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques :

$$\Delta f = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{array} \right.$$

1.5 Le laplacien vectoriel

Définition : $\Delta\vec{a} = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{a}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{a})$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta\vec{a} = \left| \begin{array}{l} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{array} \right.$$

1.6 L'opérateur symbolique nabla $\vec{\nabla}$

En coordonnées cartésiennes, on peut noter, avec $\vec{\nabla} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$:

$\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f$
$\vec{\nabla}.\vec{a} = \text{div}\vec{a}$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \vec{\text{rot}}\vec{a}$

1.7 Opérations sur les opérateurs vectoriels

$\vec{\text{grad}}(fg) = f\vec{\text{grad}}g + g\vec{\text{grad}}f$
$\text{div}(f\vec{a}) = f\text{div}\vec{a} + \vec{\text{grad}}f.\vec{a}$
$\vec{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\vec{\text{rot}}\vec{a} + \vec{\text{grad}}f \wedge \vec{a}$
$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{a}) = 0$
$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}f) = \vec{0}$
$(\vec{a}.\vec{\text{grad}})\vec{a} = \vec{\text{grad}}\frac{a^2}{2} - \vec{a} \wedge \vec{\text{rot}}\vec{a}$