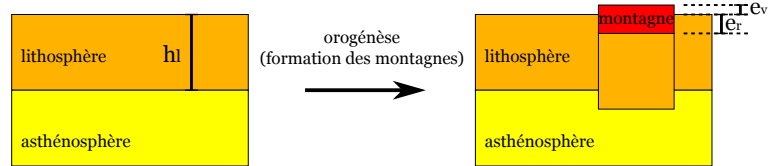


Le devoir est constitué de plusieurs exercices indépendants. Ils traitent différents chapitres du programme de mécanique des fluides à l'agrégation : statique des fluides, cinématique, dynamique des fluides parfaits et des fluides réels, phénomènes interfaciaux.

Exercice 1 Principe de l'isostasie

- 1. iceberg et poussée d'Archimède : En considérant que la glace a une masse volumique de 0.9 kg/dm^3 et l'eau de mer a une masse volumique de 1 kg/dm^3 , de combien émerge un iceberg de 300 m de haut ? On supposera un iceberg parallélépipédique.
- 2. isostasie : De même que l'iceberg sur l'eau, l'isostasie fait référence à l'état d'équilibre gravitationnel entre la lithosphère, couche superficielle rigide de la Terre, qui "flotte" sur l'asthénosphère, couche se comportant plutôt comme un liquide sur les temps géologiques. Par hypothèse, la pression est constante pour une même profondeur dans l'asthénosphère.



On suppose qu'initialement la lithosphère a une épaisseur $h_l = 50 \text{ km}$ et une densité $d_l = 2.7$. L'asthénosphère a une densité de $d_a = 3.3$.

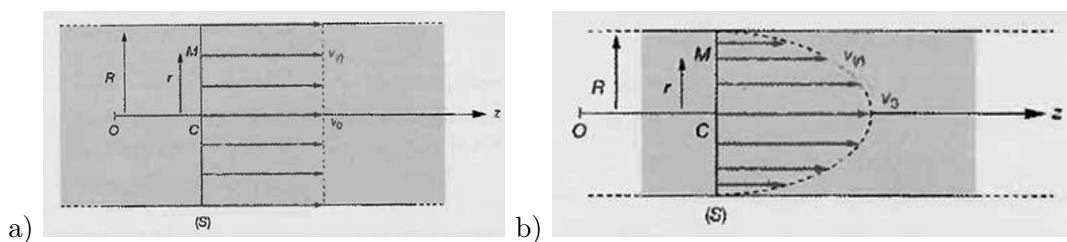
- Calculer la pression au niveau de la frontière lithosphère/asthénosphère

Suite à une collision entre deux plaques tectoniques, la lithosphère se retrouve localement surmontée d'une montagne (même densité que la lithosphère). Cette montagne comporte une partie visible d'épaisseur $e_v = 3000 \text{ m}$ et d'une racine (partie souterraine) d'épaisseur e_r . On suppose la montagne parallélépipédique.

- Calculer l'épaisseur de la "racine" de la montagne e_r en fonction des données du problème.

Exercice 2 Ecoulement permanent d'un fluide incompressible dans un tube cylindrique

Considérons l'écoulement permanent d'un liquide incompressible, de masse volumique ρ , dans un tube cylindrique d'axe Oz et de rayon R . Au niveau d'une section droite (S) , de centre C (de cote z), un point M quelconque est repéré par sa distance $CM = r$ à l'axe Oz . Nous allons distinguer successivement deux cas.

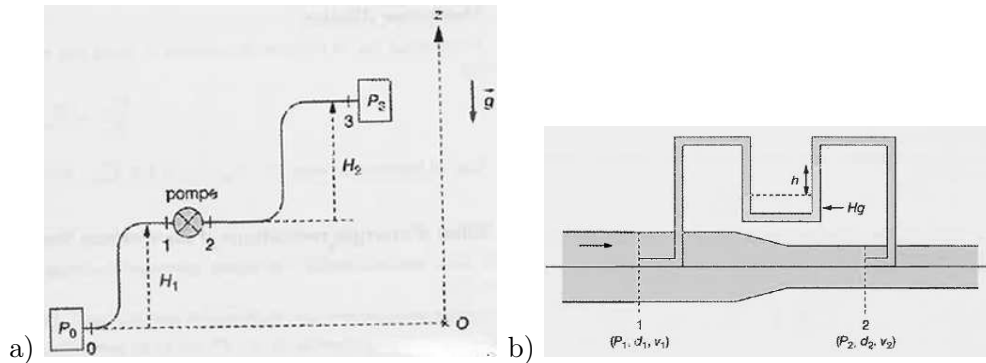


- 1. Le fluide est supposé parfait. Les effets visqueux (frottements internes au sein du fluide) sont donc négligés. Son profil de vitesse au niveau de la section (S) est représenté sur la figure a). On note V_0 la vitesse du fluide au point C .
 - a) Le tube d'écoulement est-il un tube de courant ? L'écoulement est-il unidimensionnel ?
 - b) Déterminer le débit volumique de fluide à travers la section (S) en fonction de V_0 et R . Justifier que le débit volumique est conservatif à travers une section quelconque du tube d'écoulement. Caractériser le champ de vitesse $\vec{v}$ en un point quelconque du tube d'écoulement.
- 2. A présent l'écoulement est supposé visqueux et son profil de vitesse est alors parabolique (figure b)), du type $v(r) = a + br^2$. La vitesse au centre C de la section (S) est toujours notée V_0 .
 - a) Commenter le profil de vitesse de cet écoulement visqueux. Exprimer la vitesse $v(r)$ au point M en fonction de V_0 , R et r . Cet écoulement est-il unidimensionnel ?

- b) Déterminer le débit volumique D_v à travers la section (S), en fonction de V_0 et R . En déduire l'expression du débit massique D_m .
- c) On donne $D_v = 5.0 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $R = 2.5 \text{ mm}$. Calculer la vitesse moyenne spatiale v_m du liquide à travers la section S , puis la vitesse V_0 sur l'axe Oz .

Exercice 3 Etude d'une pompe de vidange

On considère un liquide incompressible, homogène, non visqueux, en écoulement permanent dans le champ de pesanteur supposé uniforme.



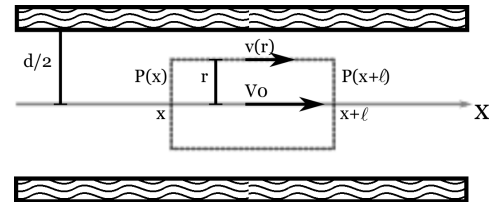
- 1. Rappeler l'équation de Bernoulli relative à l'unité de masse du liquide. On précisera la notion utilisée et on commentera l'aspect énergétique des différents termes utilisés (l'axe vertical est orienté suivant la direction ascendante).
- 2. On se propose d'utiliser cette équation pour interpréter de façon simplifiée les caractéristiques d'une pompe de vidange. Cette pompe aspire de l'eau (masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) contenue dans une enceinte inférieure à la pression P_0 , et la refoule dans une enceinte supérieure à la pression P_3 . H_1 est la hauteur d'aspiration et H_2 celle de refoulement (figure a)). On désigne par 0, 1, 2, 3 les points des conduites où les pressions valent P_0, P_1, P_2, P_3 et les vitesses v_0, v_1, v_2, v_3 (v_0 est négligeable par rapport aux autres vitesses); le pompe fonctionne en régime permanent (débit constant).
- a) Montrer que l'énergie mécanique massique apportée par la pompe s'exprime en fonction des grandeurs $P_3, P_0, \rho, g, v_3, H_1$ et H_2 .
- b) La pompe considérée a une puissance nominale de 300 W et un débit en volume $D_v = 7000 \text{ L/h}$ en régime permanent. La conduite de refoulement, cylindrique, a un diamètre intérieur constant $d = 15 \text{ mm}$.
Quelle est la dénivellation théorique entre les niveaux 0 et 3 sachant que P_3 et P_0 valent sensiblement 1 bar et que le rendement en puissance est de 85% ? On donne $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?
- c) Le constructeur indique une dénivellation de 6m. Comparer au résultat précédent et commenter.
- 3. Pour mesurer le débit volumique D_v d'une pompe en régime stationnaire, on dispose sur une partie horizontale de la conduite présentant localement un étranglement, un "Venturi" constitué de deux prises de pression statique, reliées entre elles par un manomètre à mercure ($\rho_{Hg} = 13.5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) en U. Les prises sont placées l'une dans l'étranglement et l'autre avant, mais sur un même axe horizontal. Les tubes de raccordement du manomètre aux prises sont remplis d'eau. On note P_1, d_1, v_1 et P_2, d_2, v_2 les pressions, diamètres, vitesses dans les sections 1 et 2.
Montrer que la mesure de la dénivellation h de mercure (figure b)) dans le manomètre permet la détermination du débit volumique D_v de cette pompe. Que vaudrait h pour le débit donné précédemment et un rapport de diamètre $d_1/d_2 = 2$ et $d_1 = 15 \text{ mm}$?

Exercice 4 Écoulement dans le système artériel

On cherche à modéliser l'écoulement du sang dans les systèmes artériel et veineux.

On peut représenter de manière très schématique l'écoulement dans le système artériel par un réseau de tubes qui se subdivisent de plus en plus à partir de l'aorte jusqu'au plus fins capillaires. Si on classe les vaisseaux en cinq étages de ramifications, le nombre n de vaisseaux à chaque étage, le diamètre d , la section totale $S = n\pi d^2/4$, le volume total $V = SL$ et la longueur moyenne L de chaque vaisseau sont données dans le tableau. L'écoulement est généré par le coeur qui joue le rôle d'une pompe. La viscosité cinématique du sang est égale à $3 \text{ mm}^2/\text{s}$. On prend sa masse volumique ρ égale à 1 g/cm^3 .

Étage	Aorte	Grosses artères	Branches artérielles	Artéioles	Capillaires
n	1	40	7 100	$1,6 \times 10^8$	$5,5 \times 10^9$
d (cm)	2,6	0,8	0,06	0,002	0,0009
S (cm ²)	5,3	20	20	500	3 500
V (cm ³)	180	250	250	125	300
L (cm)	34	12,5	12,5	0,25	0,086



- 1. Dans un premier temps, on modélise chaque vaisseau par un cylindre rigide de longueur L , de diamètre d . On applique une différence de pression ΔP entre ses deux extrémités. Soit Ox l'axe de révolution du cylindre, l'écoulement se faisant vers les x croissants. On cherche à établir le profil de vitesse dans la section du vaisseau en supposant un écoulement à bas nombre de Reynolds.

- On suppose que l'écoulement : - est incompressible et de masse volumique constante, - est rampant, - a atteint son régime permanent. On suppose le fluide newtonien. Définir ce que signifient ces différentes hypothèses.
- La gravité est négligée. Le gradient de pression est supposé uniforme et orienté suivant (Ox) . On note $dP/dx = -K = -\Delta P/L$. Justifier le signe - du gradient de pression.
- Le champ de vitesse est supposé de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_x$. Le champ de vitesse est-il unidirectionnel ? unidimensionnel ?
- On choisit comme système ouvert une portion de fluide de longueur $\ell \ll L$, comprise dans le cylindre de rayon $r \leq d/2$. Soit $\vec{P} = P(r)\vec{e}_x$ la quantité de mouvement de ce système. Donner les hypothèses permettant d'utiliser le théorème d'Euler :

$$\frac{d\vec{P}(r)}{dt} = D_{\vec{P}}^e(r) - D_{\vec{P}}^s(r) + F_{ext}(r),$$

où $D_{\vec{P}}^e(r)$ et $D_{\vec{P}}^s(r)$ représente respectivement les débits entrant et sortant de quantité de mouvement et $F_{ext}(r)$ la résultante des forces extérieures s'appliquant au système.

- Justifier que pour tout $r \leq d/2$, le théorème d'Euler se résume à $F_{ext}(r) = 0$.
- Les forces extérieures se composent des forces de pression et des forces de cisaillement visqueuses. On note $\sigma = \eta \frac{dv(r)}{dr}$ la contrainte tangentielle visqueuse s'appliquant sur le système. Etablir que la résultante des contraintes visqueuses s'écrit $\vec{F}^v(r) = \eta \ell 2\pi r \frac{dv(r)}{dr} \vec{e}_x$.
- Etablir $\vec{F}^p$ la résultante des forces de pression s'appliquant au système et en déduire l'équation vérifiée par la vitesse $v(r)$ en fonction de K , η et r .
- Résoudre cette équation et établir l'expression du champ de vitesse. Justifier la condition aux limites utilisées. Etablir l'expression de la vitesse maximale V_0 atteinte en $r = 0$.
- On note Q le débit du fluide à travers une section du capillaire. Etablir Q en fonction de V_0 et d , puis en fonction des paramètres du système.

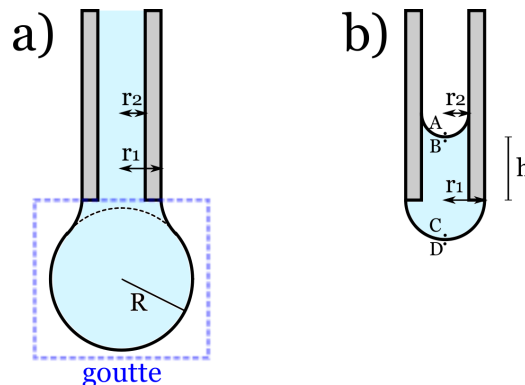
- 2. Le débit sanguin est de 5 L/min .

En supposant que l'écoulement dans tout le système artériel est un écoulement de Poiseuille, calculer pour chaque étage : la vitesse maximale V_0 , le nombre de Reynolds Re et la perte de charge associée. On résumera les données dans un tableau.

- b) La perte de charge totale vaut en réalité 13 kPa. Exprimer cette valeur en millimètre de mercure. On donne la densité du mercure : 13.5.
- c) Discuter la validité des hypothèses pour chaque étage. Quelles sources de dissipation ont pu être oubliées ?

Exercice 5 Principe du compte-gouttes

Un compte-gouttes est constitué d'un tube en verre cylindrique de rayon externe $r_1 = 1.2$ mm et de rayon interne $r_2 = 0.3$ mm. L'extrémité du compte-gouttes est chargée par une solution hydro-alcoolique de tension superficielle $\gamma = 22$ mN.m⁻¹ et de masse volumique $\rho = 900$ kg.m⁻³. Par pression modérée sur le réservoir, le liquide descend par le tube capillaire et la goutte grossit. A un certain moment, il se forme un étranglement, puis la goutte se rompt et tombe.



- 1. On suppose la forme de la goutte quasi-sphérique (figure a)). Dans un premier temps on suppose que la pression dans la goutte est constante et égale à la pression de Laplace. En faisant un bilan de force sur la goutte, en déduire le rayon R , puis la masse m , de la goutte pour lesquels la goutte se décroche du compte-gouttes. On supposera que l'étranglement se raccorde tangentiellement à la partie extérieure du capillaire.
- 2. Un patient doit absorber 1 mg/jour d'un médicament sous la forme d'une solution hydro-alcoolique dont la concentration en principe actif est de 3 mg.mL⁻¹. Calculer le nombre de gouttes, mesuré avec le compte-gouttes précédent, que le patient doit absorber par jour.
- 3. On retire le réservoir de liquide alimentant le compte-gouttes. On s'aperçoit que du liquide reste à l'intérieur du capillaire. On suppose que les deux interfaces air/liquide sont sphériques de rayon r_1 et r_2 (figure b)). Les points A et B d'une part, C et D d'autre part sont infiniment voisins. Exprimer les différences de pression $P_A - P_B$, $P_C - P_D$ et $P_C - P_B$. En déduire l'expression de la hauteur d'eau h piégée dans le canal central. Calculer h avec les valeurs du problème.

Exercice 6 Ecoulements réels : Viscosimètre à bille

Au cours de ses expériences sur la mesure de la charge de l'électron, Millikan appliqua la formule de Stokes à des gouttelettes d'huile (rayon R , masse m) tombant dans l'air sous l'action de la pesanteur ($g = 9.81$ N.kg⁻¹). On note $\rho_0 = 1.29$ kg.m⁻³ la masse volumique de l'air, $\rho = 900$ kg.m⁻³ la masse volumique de l'huile, $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ kg.m⁻¹.s⁻¹ la viscosité dynamique de l'air.

- 1. A partir d'une analyse dimensionnelle, retrouver l'expression de la force qui s'applique sur la gouttelette (formule de Stokes) en fonction de η , R et v (vitesse de la gouttelette par rapport à l'air). Pour la suite on tiendra compte du facteur numérique valant 6π dans cette formule.
- 2. Calculer la vitesse limite v_l de chute puis construire et donner l'expression du nombre de Reynolds Re associé
- 3. La formule de Stokes n'est applicable que si $Re \ll 1$. En déduire que le rayon des gouttelettes doit rester très inférieur à une limite que l'on calculera en fonction de η , g , ρ_0 et ρ . Faire l'application numérique.

- 4. Mêmes questions pour des gouttes de mercure qui tombent dans l'eau (on tiendra compte de la poussée d'Archimède). On donne $\rho_0 = 1000\text{kg.m}^{-3}$ pour l'eau, $\rho = 13600\text{kg.m}^{-3}$ pour le mercure et, $\eta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ pour l'eau. Faire l'application numérique.