# *Introduction au devoir de Mécanique des Fluides*
## *2010-2011*

Christophe Raufaste
Christophe.Raufaste@unice.fr

Préparation à l'Agrégation Interne de Sciences Physiques
Agrégation Externe de Sciences Physiques, option physique
Agrégation Externe de Sciences Physiques, option chimie

# Programme Mécanique des Fluides

PCSI

**Statique des fluides**:

- Eléments de statique des fluides dans le champ de pesanteur ($dp/dz = -\rho g$, applications atmosphère isotherme et gaz parfait, poussée d'Archimède)

PC

**Mécanique des fluides**:

- Etude phénoménologique des fluides (libre parcours moyen, pression, viscosité, écoulement autour d'une sphère, écoulements laminaires et turbulents, nombre de Reynolds, modèle fluide parfait)
- Cinématique des fluides (description de Lagrange et d'Euler, densité de courant, débits massique et volumique, équation locale de conservation de la masse, écoulements stationnaires, incompressibles, irrotationnels)
- Bilans dynamiques et thermodynamiques (bilans qté de mvt, moment cinétique, énergies, entropie pour un écoulement 1D en régime permanent)
- Equations dynamiques locales (modèle fluide parfait et écoulements visqueux)

**Acoustique dans les fluides:**

- Approx. acoustique, éq. de d'Alembert, ondes planes progressives harmoniques, impédance acoustique, aspects énergétiques, réflexion et transmission sur une interface entre 2 fluides
- Ondes de surface : gravité, capillaires (notion de tension de surface) et solitons; milieu dispersif (relation dispersion, vitesses de phase et groupe)

agreg. ext. opt. physique

# Palmarès Agrégation Interne

## Composition sur la physique et le traitement informatisé de l'information

- 2010 : non
- 2009 : 1/5, écoulement d'eau à travers un nanotube de carbone
- 2008 : 1/4, ondes sonores
- 2007 : non
- 2006 : non
- 2005 : 1/3, études des systèmes ouverts en régime permanent
- 2004 : non
- 2003 : non
- 2002 : 1/3, pression acoustique : propagation 1D du son et microphone
- 2001 : non
- 2000: non
- 1999 : 2/3, ondes acoustiques dans un gaz
  (transferts thermiques : conduction, diffusion et ondes thermiques)
- 1998 : non
- 1997 : non
- 1996 : non

## Leçons de Physique (3/30)

- Statique des fluides (n°8)
- Dynamique des écoulements parfaits (n°9)
- Ondes sonores dans les fluides (n°21)

## Montages de Physique (1/31 + 6/31)

- Ondes acoustiques (n°3)

+possibilités montages "ondes" (n°23-24, 27-28 et 30)

# Palmarès Agrégation Externe, opt. chimie

## Composition de physique

- 2010 : non
- 2009 : 1/5, énergie éolienne domestique: bilan pour un système ouvert (masse, quantité de mouvement, énergie)
- 2008 : 2/4, température dans la lithosphère (bilan local, diffusion thermique) et sismologie (propagation d'ondes de compression)
- 2007 : non
- 2006 : 1/2, force de traînée sur un avion, statique des fluides (profil d'atmosphère; aérostat), cinématique des fluides (définitions), dynamique des fluides (relation de Bernoulli, effet Venturi, tube de Pitot, portance d'un avion), bilan pour un système ouvert (tuyère)

## Programme de composition de physique (d'après BO juillet 2010)

### Deuxième épreuve : composition de physique (durée cinq heures)

Elle porte sur les programmes de physique appliqués à la rentrée scolaire de l'année où est ouvert le concours.
1. des classes
- de seconde générale et technologique
- de la classe de première S
- de la classe terminale S, y compris l'enseignement de spécialité
2. des classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles
- classes de première année :
. BCPST (biologie, chimie, physique et sciences de la terre)
. PCSI (physique, chimie, sciences de l'ingénieur) : on se limitera aux contenus de la partie intitulée « III : Approche théorique : D) Électromagnétisme) »
- classes de deuxième année :
. BCPST (biologie, chimie, physique et sciences de la terre)
. PC (physique, chimie) : on se limitera aux contenus de la partie intitulée « I Approche théorique B électromagnétisme »
3. Des sections préparatoires au BTS chimiste

# Palmarès Agrégation Externe, opt. chimie

## Leçons de Physique (6/42)

•Interface liquide-solide. Phénomène de mouillage : angle de raccordement, condition de Young. Ascension capillaire : loi de Jurin (n°27, BTS chimiste).

•Interface liquide pur-gaz (n°28, BTS chimiste)

•Statique des fluides : milieux continus ; théorème d'Archimède ; équation de la statique des fluides. Mesure de pressions (n°39, BCPST)

•Dynamique des fluides : énergie mécanique; relation de Bernoulli; charge en un point; applications (n°40, BCPST2)

•viscosités des fluides newtoniens et conséquences. Notion de viscosité; loi de Poiseuille; nombre de Reynolds (n°41, BCPST2)

•viscosités des fluides newtoniens. Ecoulements rampants (n°42, BCPST2)

## Commentaires Leçons de Physique

•Utiliser référence "gouttes, bulles, perles et ondes" (voir biblio) pour les 2 premières leçons
•ATTENTION, les leçons de statique, dynamique et viscosités des fluides sont à traiter au niveau des classes BCPST qui diffèrent des classes PC. Pour exemple les équations locales (bilan de masse, Navier-Stokes) sont hors-programme !!

# Palmarès Agrégation Externe, opt. physique

| | Composition | Problème |
|---|---|---|
| • 2010 : | 1/2 thermoconvection : hydrostatique et thermo bilan local, équation diffusion, convection, Navier-Stokes, instabilité Rayleigh-Benard | non |
| • 2009 : | 2/4 tuyaux sonores, instruments à vent impédances, restitution du son, haut-parleur | non |
| • 2008 : | non | non |
| • 2007 : | non | ½ magnétohydrodynamique éq. hydro pour un fluide ionisé (plasma), propagation |
| • 2006 : | 1/8 bilan énergétique sur syst. ouvert | non |
| • 2005 : | ¼ ondes de surface libre d'un liquide paquets d'ondes et vitesse de groupe | non |
| • 2004 : | 4/4 propagation dans les fluides ondes-propagation; dynamique des fluides acoustique; ondes de gravité, capillaires; solitons | non |
| • 2003 : | non | non |
| • 2002 : | ??? | ??? |
| • 2001 : | non | non |

# Palmarès Agrégation Externe, opt. physique

| | Composition | Problème |
|---|---|---|
| •2000 : | non | ??? |
| •1999 : | ½ ondes de surface libre d'un liquide<br>analyse dimensionnelle, éq. ondes linéaires<br>relation dispersion, eau profonde, solitons | non |
| •1998 : | ¾ acoustique linéaire dans un fluide<br>applications: cavité sonore, rayonnement<br>éléments d'électro-acoustique (haut-parleur) | non |
| • 1997 : | non | 2/5 énergie et tension de surface<br>transition de phase dans un film de tensioactifs |
| • 1996 : | non | non |
| • 1995 : | non | 2/6 physique de la combustion<br>éq. bilan d'un système ouvert<br>densités de courant convective et diffusive |

# Palmarès Agrégation Externe, opt. physique

## Leçons de Physique (4/55)

•Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulements visqueux. Nombre de Reynolds. Exemples simples. (n°9)
•Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications. (n°10)
•Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides : applications. (n°11)
•Ondes acoustiques dans les fluides. (n°27)

+leçons générales «ondes» (n°26, 28, 39, 54) ou phénomènes de transport (n°20)

## Montages de Physique (3/40 + 2/40)

•Phénomènes de surface (n°2)
•Dynamique des fluides (n°3)
•Ondes acoustiques (n°33)
+montages généraux «ondes» (n°32 et 34) ou phénomènes de transport (n°39, 40)

# Références


## Ouvrages Prépa :

-collection PUF: Mécanique des solides et des fluides, 2ème année

-collection HPrépa: Mécanique des fluides. 2ème année PC-PSI (dynamique)
Ondes. 2ème année PC-PSI (ondes et acoustique)

-collection taupe-niveau: Mécanique des fluides. Fiches, méthodes et problèmes corrigés (statique, dynamique, acoustique)

-collection TEC&DOC: Mécanique. 2ème année (dynamique)

## Mécanique des fluides tous niveaux (Prépa -> Master) :

-Hydrodynamique physique.
Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit, éd EDP sciences

-Hydrodynamique physique, Problèmes résolus avec rappels de cours.
Marc Fermigier, éd. Dunod

-Mécanique des fluides, Eléments d'un premier parcours
Patrick Chassaing

## Pour les curieux :

-Ce que disent les fluides
Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit, éd Belin

-Gouttes, bulles, perles et ondes
Pierre-Gilles de Gennes, Françoise Brochard-Wyart, David Quéré, éd Belin

## Sur le web :

-National Committee for fluid mechanics films (vidéos en anglais)
http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html

-University of Iowa (vidéos en anglais)
http://www.iihr.uiowa.edu/products/dhrm.html

# Introduction : dates clés

18ème

-caractérisation du fluide parfait (Bernoulli, Euler)

19ème

-mise en évidence de la viscosité (Poiseuille, Stokes, Navier)
-première caractérisation de la turbulence (Reynolds)

19-20èmes

-couche limite (Prandtl)
-instabilités (Rayleigh-Plateau, Kelvin-Helmholtz, ... )

physique moderne

-turbulence
-super-fluidité (Hélium liquide à très basses températures)
http://www.youtube.com/watch?v=7U4hQ_Y9_Jk&annotation_id=annotation_496682&feature=iv
-fluides non-newtoniens
http://www.youtube.com/watch?v=GX4_3cV_3Mw

-problèmes aux interfaces (mouillages, écoulements 2D)
-problèmes interdisciplinaires: météorologie, géologie, biologie, astronomie
http://www.rowland.org/labs/bacteria/index.html

-exemples sur la "gallery of fluid motion" de l'APS
http://scitation.aip.org/pof/gallery/

# Méthodologie

Mécanique du solide

- référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

solides

liquides

Systèmes ouverts

- notion de particule fluide
- approches Lagrangienne et Eulérienne

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

Statique des fluides
(fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère
- phénomène de couche limite et portance

Acoustique
(fluide *presque* au repos)

- approximation acoustique
- application gaz parfait
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- ondes stationnaires et modes propres
- transmission-réflexion entre 2 milieux (impédance acoustique)

# Systèmes ouverts

**Mécanique du solide**

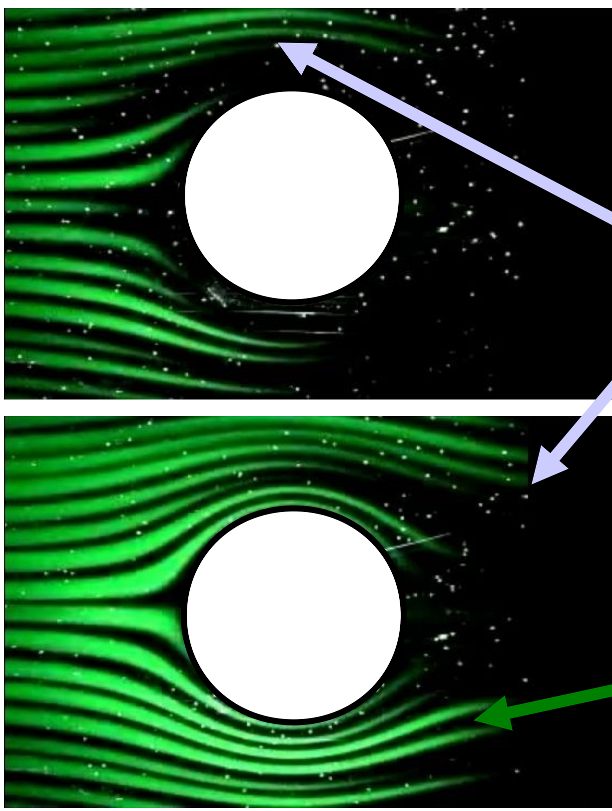
- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

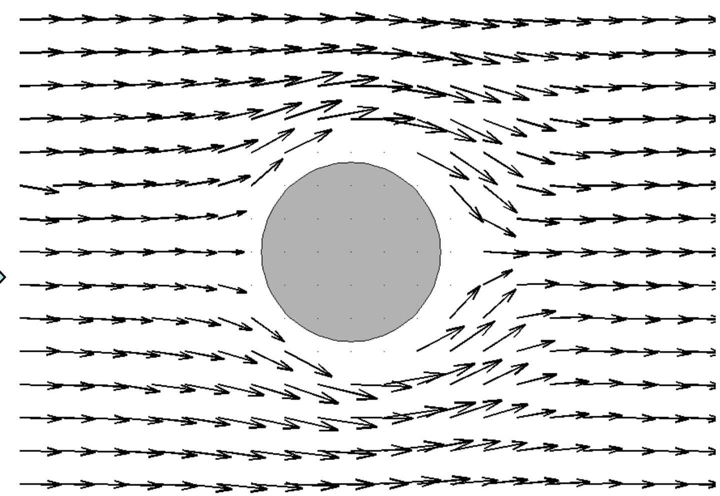
<u>Problématique</u> : passer d'un système fermé mobile  à un système ouvert fixe

<u>Exemple</u> : écoulement autour d'un obstacle



suivi de particules individuelles

lignes d'émission (utilisation colorant)



champ de vitesse

http://www.youtube.com/watch?v=rbMx2NMqyuI&NR=1

# Systèmes ouverts

**Mécanique du solide**

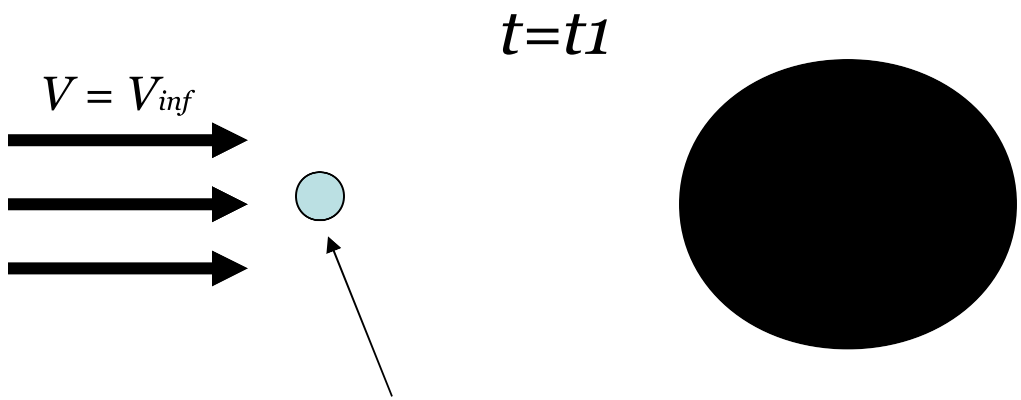
- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<u>Problématique</u> : passer d'un système fermé mobile  à un système ouvert fixe
<u>Exemple</u> : écoulement autour d'un obstacle

**Notion de particule fluide:**
Taille intermédiaire (mésoscopique) entre l'échelle microscopique (l.p.m.) et l'échelle macroscopique  de l'écoulement (R).
->S'assurer que l'on moyenne suffisamment, mais pas trop.

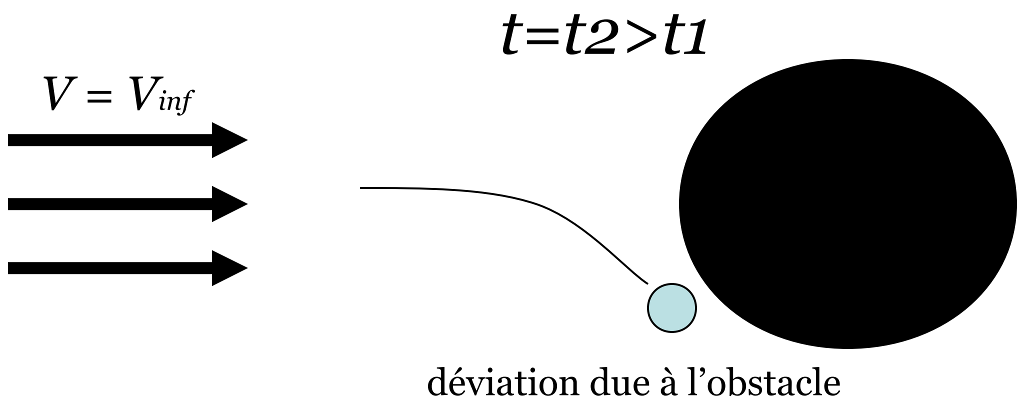



Système fermé (nombre donné de particules) et position (X(t),Y(t)) change au cours du temps

# Systèmes ouverts

| Mécanique du solide | Systèmes ouverts |
| --- | --- |
| •Référentiel galiléen<br>•système fermé<br>•principe fondamental de la dynamique<br>•théorème énergie cinétique | •Notion de particule fluide<br>•Approches Lagrangienne et Eulérienne |

Problématique : passer d'un système fermé mobile à un système ouvert fixe
Exemple : écoulement autour d'un obstacle



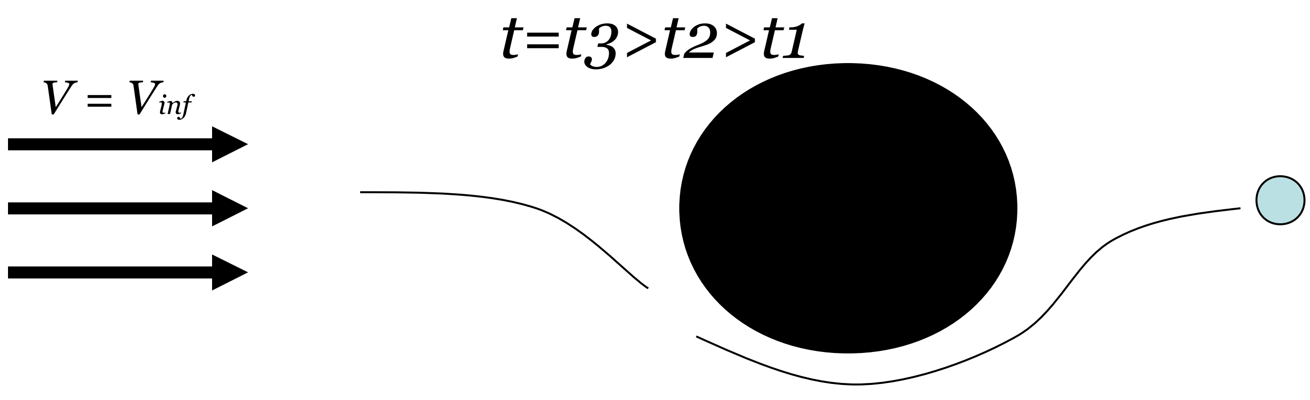
# Systèmes ouverts

**Mécanique du solide**
- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

→

**Systèmes ouverts**
- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<u>Problématique</u> : passer d'un système fermé mobile à un système ouvert fixe
<u>Exemple</u> : écoulement autour d'un obstacle




particule interagit avec l'obstacle entre t1 et t3 mais ni avant ni après.

# Systèmes ouverts

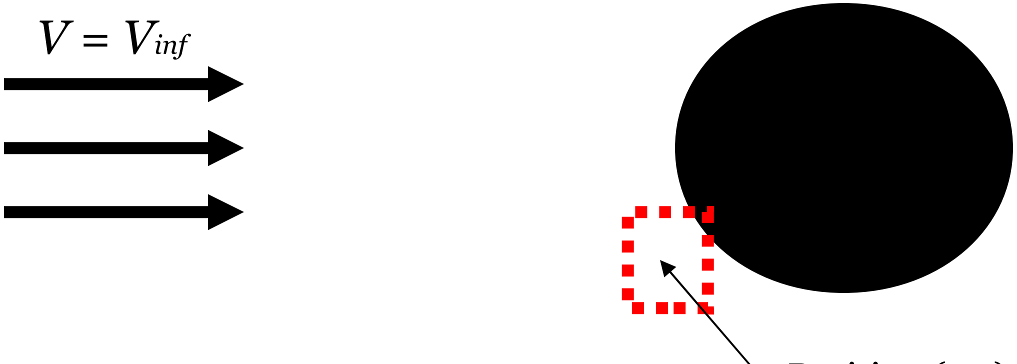
**Mécanique du solide**

- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<u>Problématique</u> : passer d'un système fermé mobile  à un système ouvert fixe
<u>Exemple</u> : écoulement autour d'un obstacle




Position (x,y) fixe "volume de contrôle"
grandeurs $v(x,y,t)$, $\rho(x,y,t)$
carte des grandeurs ou champs

# Systèmes ouverts

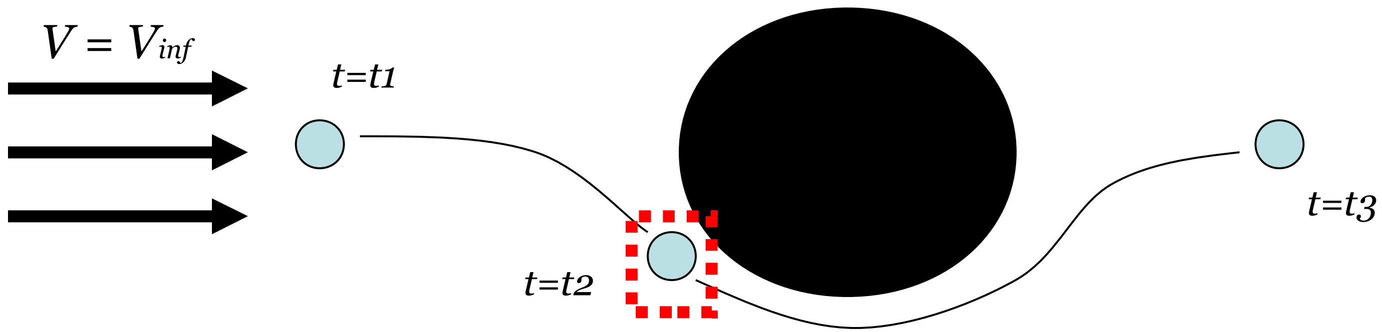
**Mécanique du solide**

- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

Problématique : passer d'un système fermé mobile à un système ouvert fixe
Exemple : écoulement autour d'un obstacle




système ouvert : la particule fait partie du système seulement à t=t2.
A ce moment là seulement: X=x, Y=y et V(X(t2),Y(t2)) = v(X(t2),Y(t2),t2) = v(x,y,t2)

# Systèmes ouverts

## Mécanique du solide

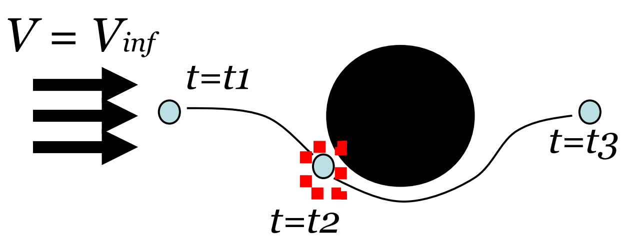
- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

## Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<u>Problématique</u> : passer d'un système fermé mobile à un système ouvert fixe

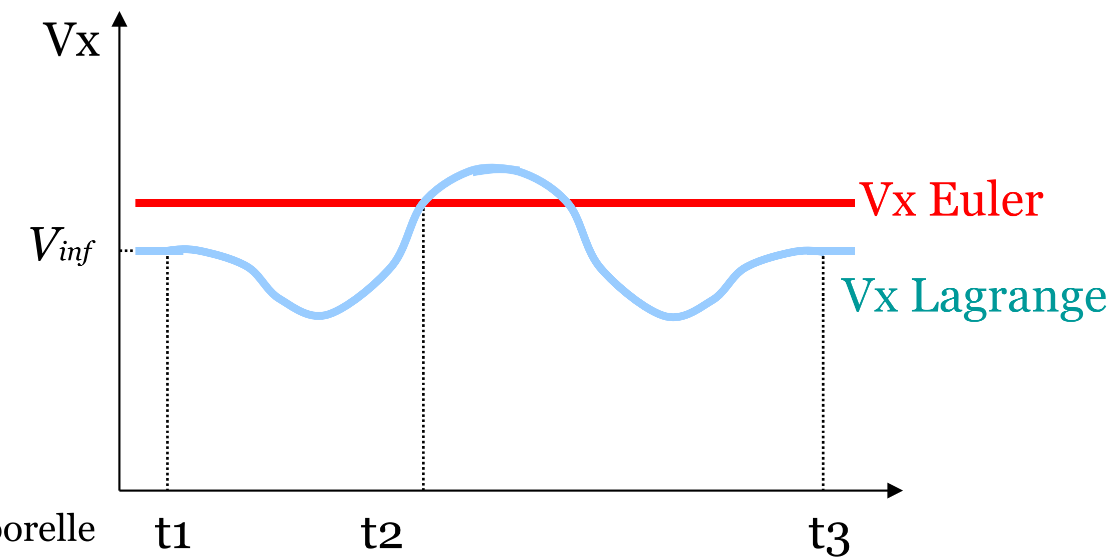
<u>Exemple</u> : écoulement autour d'un obstacle




$$dVx/dt \neq \partial Vx/\partial t$$

dérivée particulaire ou Lagrangienne

dérivée partielle temporelle à position fixe



# Systèmes ouverts

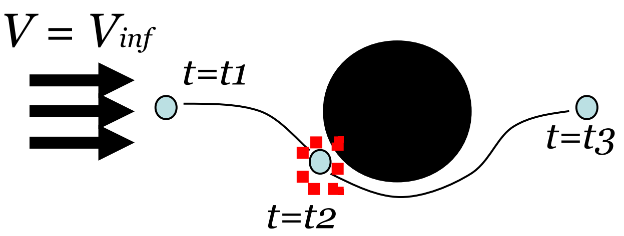
**Mécanique du solide**

- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<ins>Problématique</ins> : passer d'un système fermé mobile  à un système ouvert fixe
<ins>Exemple</ins> : écoulement autour d'un obstacle




direction
d'où vient la particule

différence avec volumes de contrôle voisins

$$dVx/dt = \partial Vx/\partial t + (\vec{V}.\vec{grad})Vx$$

dérivée particulaire
ou Lagrangienne

dérivée partielle temporelle
à position fixée

# Systèmes ouverts

**Mécanique du solide**

- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

$\longrightarrow$

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<u>Problématique</u> : passer d'un système fermé mobile à un système ouvert fixe

<u>Cas général</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\cdot = \frac{\partial}{\partial t}\cdot + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\cdot}$$

Expression en coordonnées cartésiennes pour un scalaire:

$$\frac{d}{dt}f = \frac{\partial}{\partial t}f + v_x\frac{\partial}{\partial x}f + v_y\frac{\partial}{\partial y}f + +v_z\frac{\partial}{\partial z}f$$

Passage $(t, x(t), y(t), z(t))$ (pdv Lagrangien) $\rightarrow$ $(t, x, y, z)$(pdv Eulérien) :

$$\begin{array}{rcccccc} \frac{d}{dt}f\,(t, x(t), y(t), z(t)) & = & \frac{dt}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)_{x,y,z} & + & \frac{dx(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)_{t,y,z} & + & \ldots \\ & = & \left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)_{x,y,z} & + & v_x\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)_{t,y,z} & + & \ldots \end{array}$$

Et pour un vecteur en coordonnées cartésiennes, on a:

$$(\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{a} = \left| \begin{array}{l} (\vec{v}.\vec{\text{grad}})a_x \\ (\vec{v}.\vec{\text{grad}})a_y \\ (\vec{v}.\vec{\text{grad}})a_z \end{array} \right.$$

# Systèmes ouverts

**Mécanique du solide**

- Référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

$\longrightarrow$

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

<u>Conclusion</u> :

1) notion de particule fluide
   taille intermédiaire (échelle mésoscopique entre micro et macro)

2) passage point de vue Lagrangien $\longrightarrow$ Eulérien

| Lagrangien | Eulérien |
| --- | --- |
| particule fluide | volume de contrôle |
| système fermé | système ouvert |
| en mouvement (x(t),y(t)) | fixe (x,y) |

$$\frac{d}{dt}\cdot = \frac{\partial}{\partial t}\cdot + (\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\cdot$$

# Méthodologie

## Mécanique du solide

- référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

solides

liquides

## Systèmes ouverts

- notion de particule fluide
- approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère
- phénomène de couche limite et portance

## Acoustique (fluide *presque* au repos)

- approximation acoustique
- application gaz parfait
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- ondes stationnaires et modes propres
- transmission-réflexion entre 2 milieux (impédance acoustique)

# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

$\longrightarrow$

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Problématique</u> : écriture d'un système fermé d'équations régissant la dynamique d'un fluide

<u>Variable</u> :

Vx (x,y,z,t)
Vy (x,y,z,t)
Vz (x,y,z,t)
P(x,y,z,t)
ρ(x,y,z,t)

$\longrightarrow$ nécessité de 5 équations

((T, $J_{élec}$) $\longrightarrow$ ajout équations suivant problème)

## Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

Effectuer un bilan local :

système fermé (particule fluide) $\Longleftrightarrow$ système ouvert (volume de contrôle)

terme convectif $\dfrac{d}{dt}\cdot = \dfrac{\partial}{\partial t}\cdot + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\cdot$

géométrie simplifiée (adaptée à la géométrie) $\longrightarrow$ géométrie quelconque (formalisme vectoriel)

généralisation

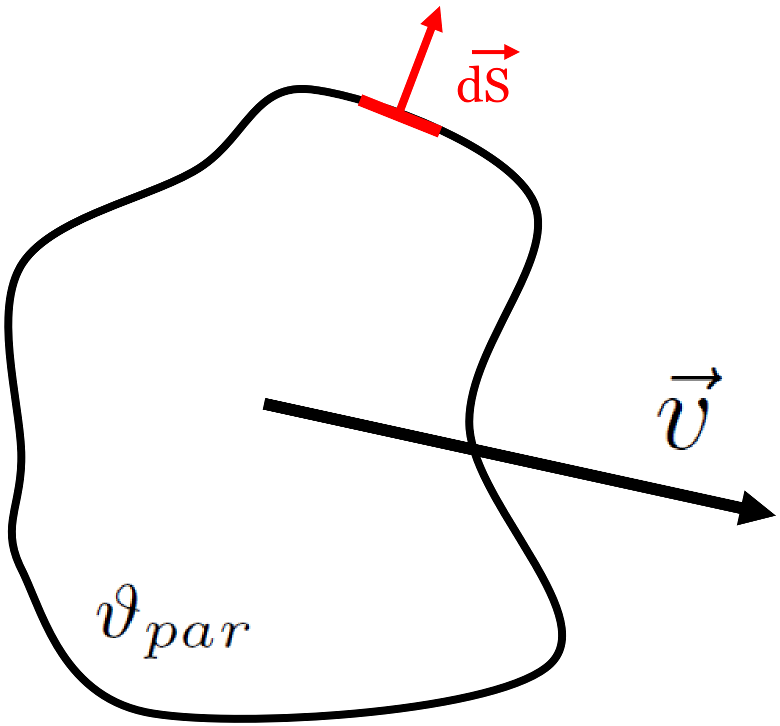
# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers




<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$\underset{1}{m\frac{d}{dt}\vec{v}} = \sum \vec{F}_{ext} = \underset{2}{\sum \vec{F}_{ext}^{contact}} + \underset{3}{\vec{F}_{ext}^{volume}}$$

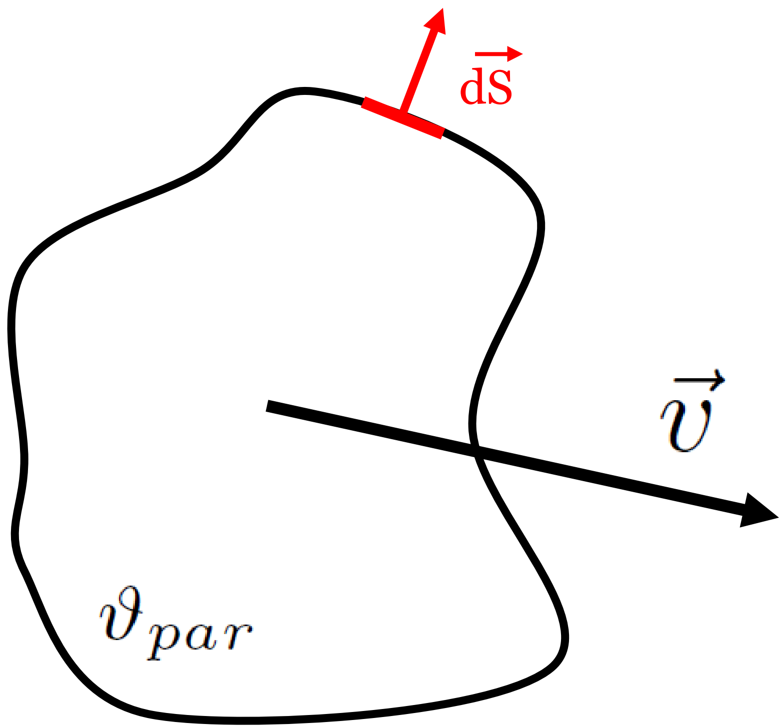
$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \left( \iiint\limits_{\vartheta_{par}} \rho dV \right) \frac{d}{dt}\vec{v} \underset{\uparrow}{=} \iiint\limits_{\vartheta_{par}} \left( \rho \frac{d}{dt}\vec{v} \right) dV$$

échelle méso

# Equations locales

**Systèmes ouverts**
- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**
- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers




<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext}^{contact} + \vec{F}_{ext}^{volume}$$

1 2 3

$$\sum \vec{F}_{ext}^{volume} = \vartheta_{par}\vec{f} = \iiint_{\vartheta_{par}} \vec{f} dV$$

exemples :

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= \rho\vec{g} && \text{force volumique de gravité}\\
&= -\rho\vec{a}_e - \rho\vec{a}_c && \text{forces vol. d'entraînement et de coriolis (référentiel non galiléen)}\\
&= \tilde{n}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) && \text{force volumique électro-magnétique ($\tilde{n}$ densité de charges)}
\end{aligned}$$

# Equations locales

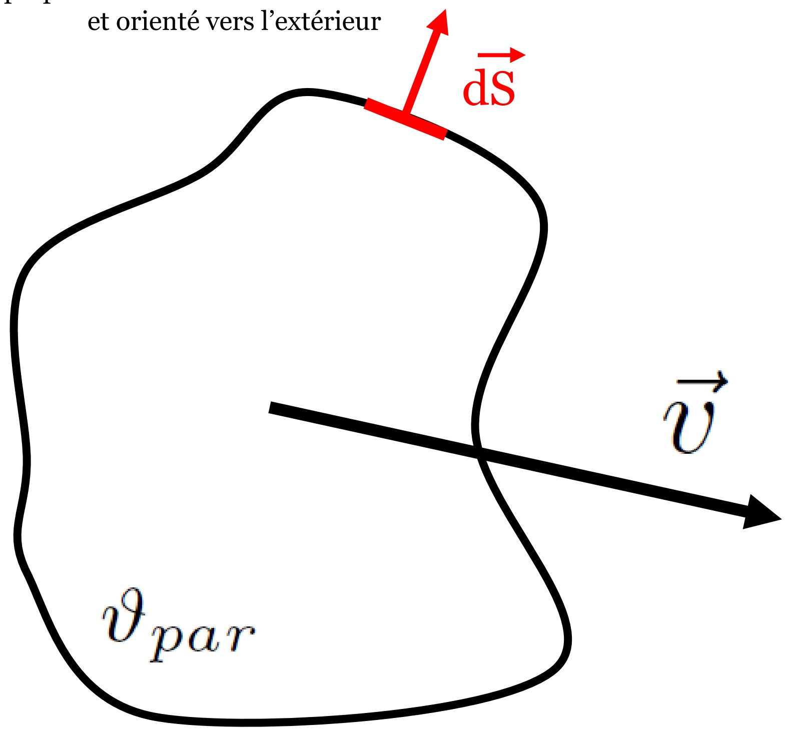
## Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$, $\vec{n}$ vecteur unitaire,
perpendiculaire localement à la surface
et orienté vers l'extérieur




<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext}^{contact} + \vec{F}_{ext}^{volume}$$

1 2 3

$$\sum \vec{F}_{ext}^{contact} = -\oiint \sigma \cdot \vec{dS}, \text{ "}\cdot\text{" opérateur qui dépend de la situation}$$

<u>exemple : seulement force de pression</u>

$$\sigma \cdot \vec{dS} = P\vec{dS}$$

$$\sum \vec{F}_{ext}^{contact} = -\oiint P\vec{dS} = -\iiint_{\vartheta_{par}} \vec{\text{grad}}P\,dV$$

$$\iiint_{\vartheta_{par}} \left(\rho\frac{d}{dt}\vec{v}\right) dV = \iiint_{\vartheta_{par}} \left(-\vec{\text{grad}}P + \vec{f}\right) dV$$

valable $\forall \vartheta_{par}$

# Equations locales

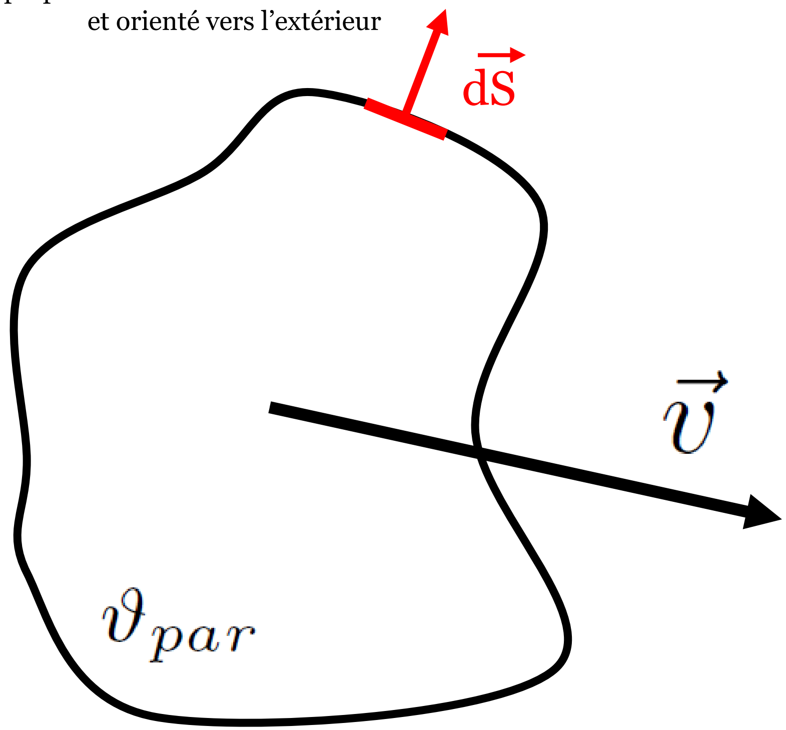
**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$, $\vec{n}$ vecteur unitaire, perpendiculaire localement à la surface et orienté vers l'extérieur




<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext}^{contact} + \vec{F}_{ext}^{volume}$$

1 2 3

$$\sum \vec{F}_{ext}^{contact} = -\oiint \sigma \cdot \vec{dS}, \text{ "}\cdot\text{" opérateur qui dépend de la situation}$$

<u>exemple : seulement force de pression</u>

$$\sigma \cdot \vec{dS} = P\vec{dS}$$

$$\sum \vec{F}_{ext}^{contact} = -\oiint P\vec{dS} = -\iiint_{\vartheta_{par}} \vec{\text{grad}}P\,dV$$

$$\boxed{\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\vec{\text{grad}}P + \vec{f}}$$

équation d'Euler

# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

expérience de la goutte de bitume
1 goutte/8ans (1930- )
University of Queensland, US

Hypothèses : système fermé + réf. galiléen

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext}^{contact} + \vec{F}_{ext}^{volume}$$

1 2 3

$$\sum \vec{F}_{ext}^{contact} = -\oiint \sigma \cdot d\vec{S}, \text{ "}\cdot\text{" opérateur qui dépend de la situation}$$

cas général : forces normales et tangentielles

Force de cisaillement : force tangentielle à la surface de contact.

Définition “mécanique” d'un fluide : un fluide ne résiste pas au cisaillement.
Le temps qu’il met à couler du fait du cisaillement dépend d’un paramètre du fluide appelé viscosité.

Plus la viscosité est grande et plus le fluide s’oppose au mouvement.

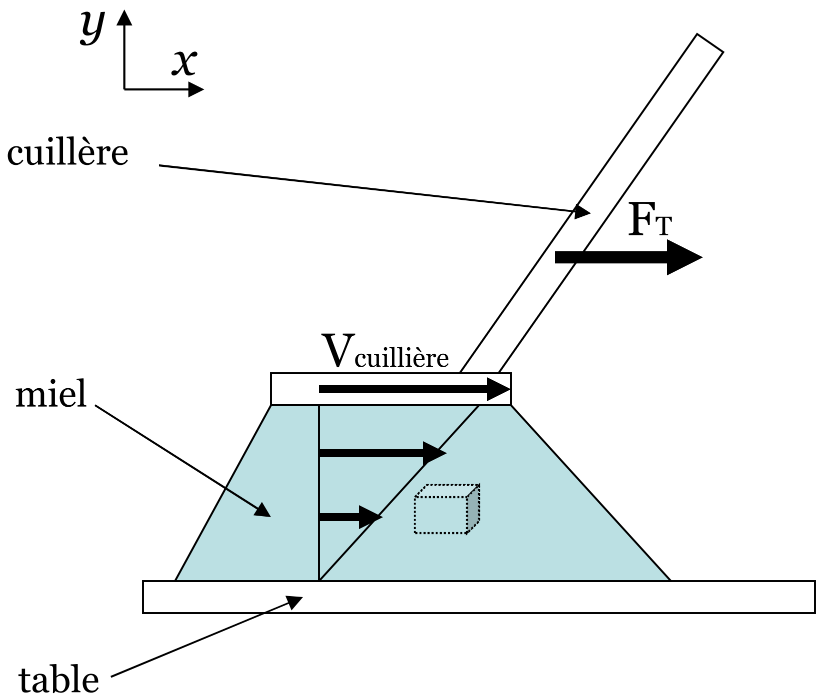
# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers




<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext}^{contact} + \vec{F}_{ext}^{volume}$$

1 2 3

$$\sum \vec{F}_{ext}^{contact} = -\oiint \sigma \cdot d\vec{S},\ \text{"}\cdot\text{" opérateur qui dépend de la situation}$$

<u>cas général : forces normales et tangentielles</u>

À l'intérieur du fluide, les forces visqueuses s'opposent aux différences de vitesse :

$$F_x^{visq}/\mathcal{A} = \eta\frac{\partial}{\partial y}v_x + \cancel{\eta_2(\frac{\partial}{\partial y}v_x)^2 + \eta_3(\frac{\partial}{\partial y}v_x)^3} + \ldots$$

on ne garde que le 1er terme : fluide newtonien
$\eta$ viscosité dynamique

# Equations locales

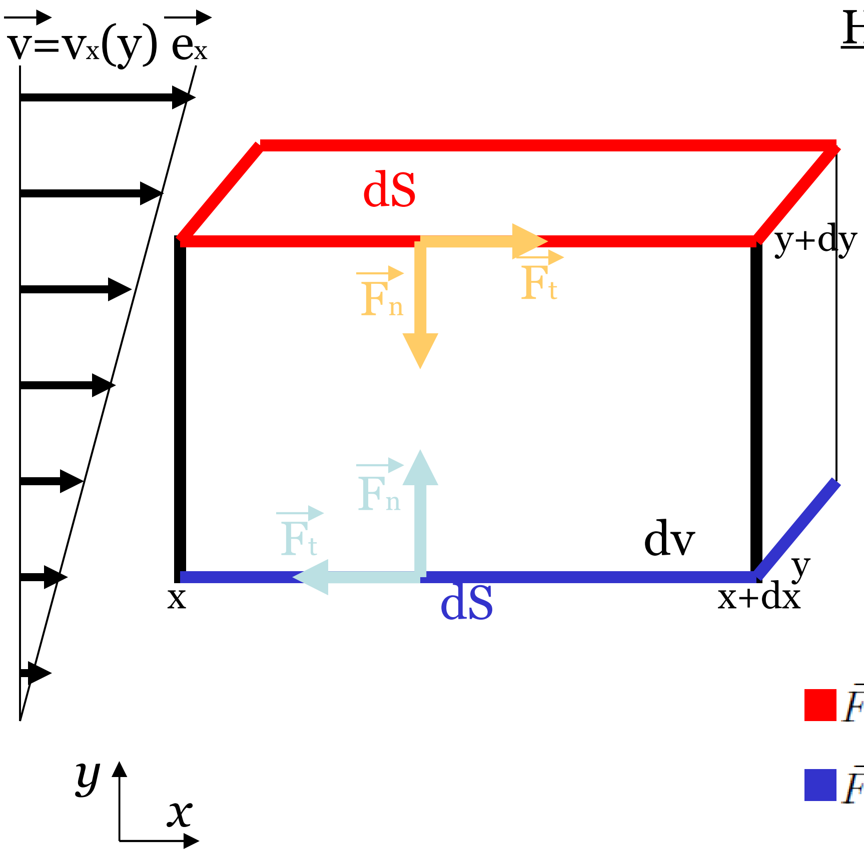
**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

→

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers




<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}^{contact}_{ext} + \vec{F}^{volume}_{ext}$$

1 2 3

<u>force normale (pression)</u>

$$\vec{F}_n^{sup} = p(y+dy)dS(-\vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_n^{inf} = p(y)dS(+\vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_n = -\frac{p(y+dy)-p(y)}{dy}dSdy\vec{e}_y = -\vec{\mathrm{grad}}PdV$$

<u>force tangentielle (visqueuse)</u>

$$\vec{F}_t^{sup} = \eta\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy)\right|dS(+\vec{e}_x) = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy)dS(+\vec{e}_x)$$

$$\vec{F}_t^{inf} = \eta\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\right|dS(-\vec{e}_x) = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)dS(-\vec{e}_x)$$

$$\vec{F}_t = \eta\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy)-\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)}{dy}dSdy\vec{e}_x = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y)\vec{e}_x dSdy = \eta\Delta\vec{v}dV$$

# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

→

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Hypothèses</u> : système fermé + réf. galiléen

$$\underbrace{m\frac{d}{dt}\vec{v}}_{1} = \sum \vec{F}_{ext} = \sum \underbrace{\vec{F}_{ext}^{contact}}_{2} + \underbrace{\vec{F}_{ext}^{volume}}_{3}$$

<u>cas général</u> : équation de Navier-Stokes

$$\boxed{\underbrace{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}\right)}_{\text{inertie}} = \underbrace{-\vec{\mathrm{grad}}P + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f}}_{\text{expression volumique des forces}}}$$

hyp. terme visqueux : écoulement incompressible + fluide newtonien

# Equations locales

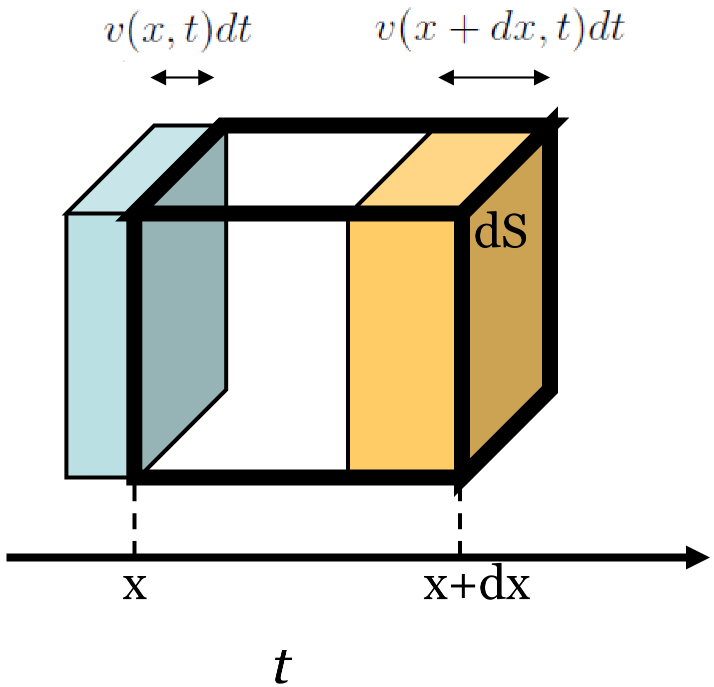
**Systèmes ouverts**

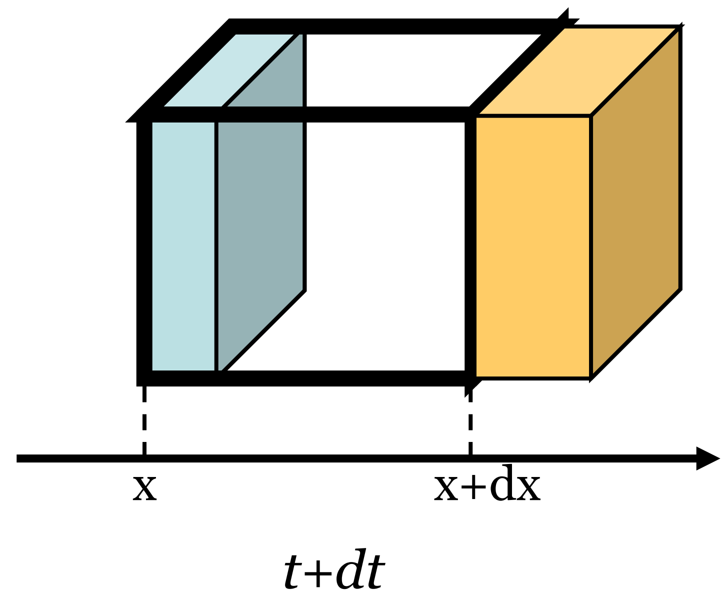
- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Bilan de masse local :</u> exemple système 1D




$$\delta m_g = \rho(x,t)\delta V_g = \rho(x,t)v(x,t)dtdS$$

$$\delta m_d = \rho(x+dx,t)\delta V_d = \rho(x+dx,t)v(x+dx,t)dtdS$$

échange de matière entre t et t+dt

$$\delta m_g - \delta m_d = -\frac{\rho(x+dx,t)v(x+dx,t) - \rho(x,t)v(x,t)}{dx} dtdxdS = -\mathrm{div}(\rho\vec{v})dtdV$$

# Equations locales

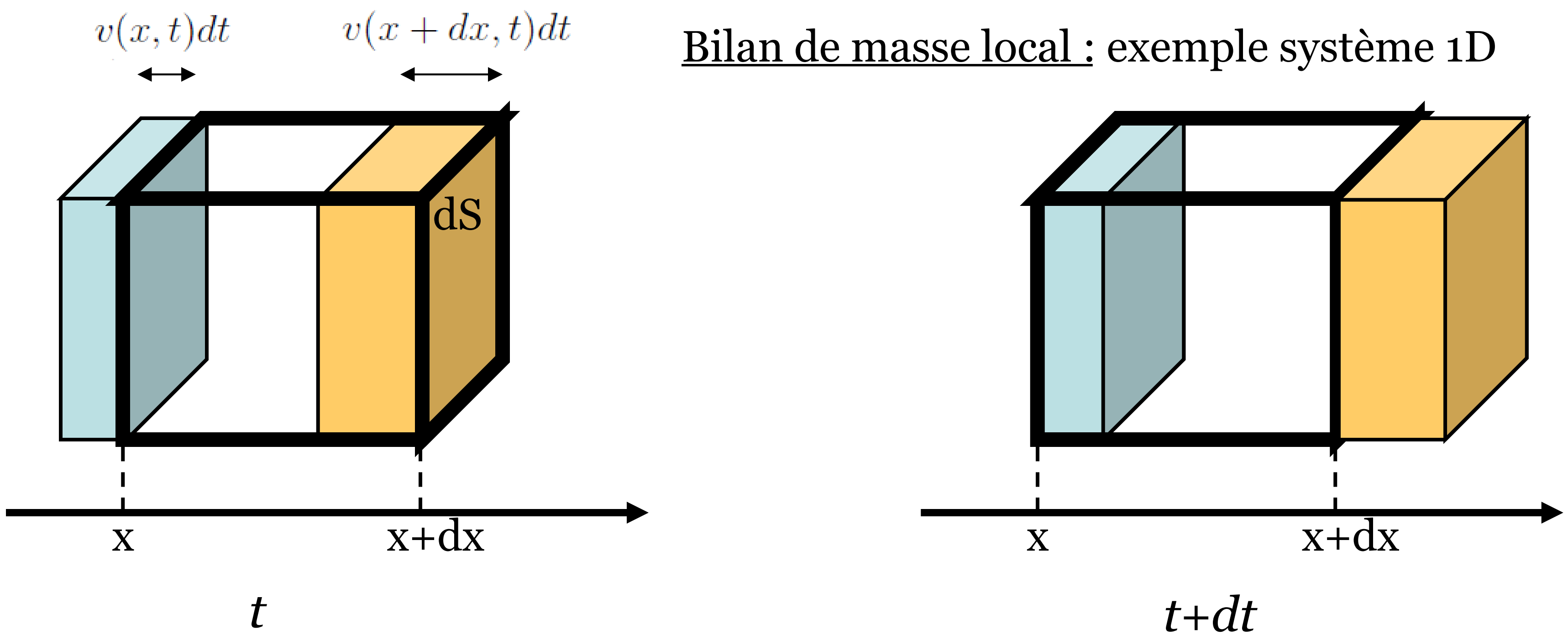
**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Bilan de masse local :</u> exemple système 1D




évolution entre t et t+dt $m(x,t+dt)-m(x,t)=\rho(x,t+dt)dV-\rho(x,t)dV=\dfrac{\rho(x,t+dt)-\rho(x,t)}{dt}dtdV=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dtdV$

# Equations locales

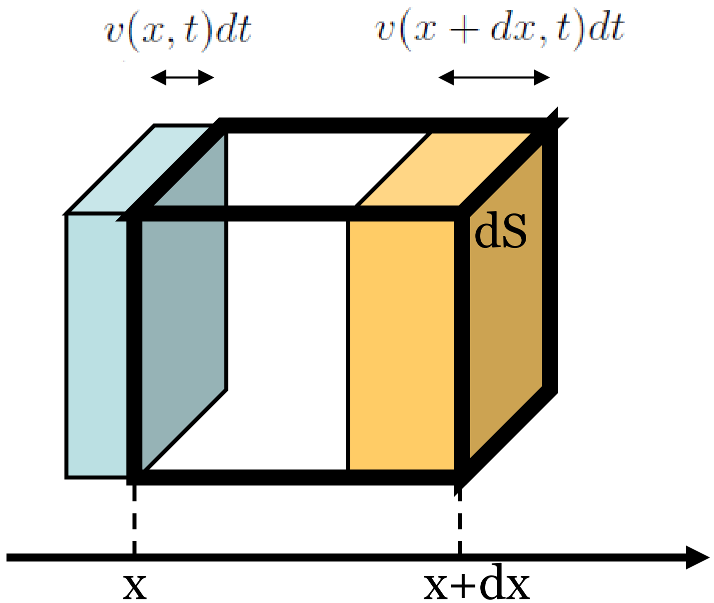
### Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

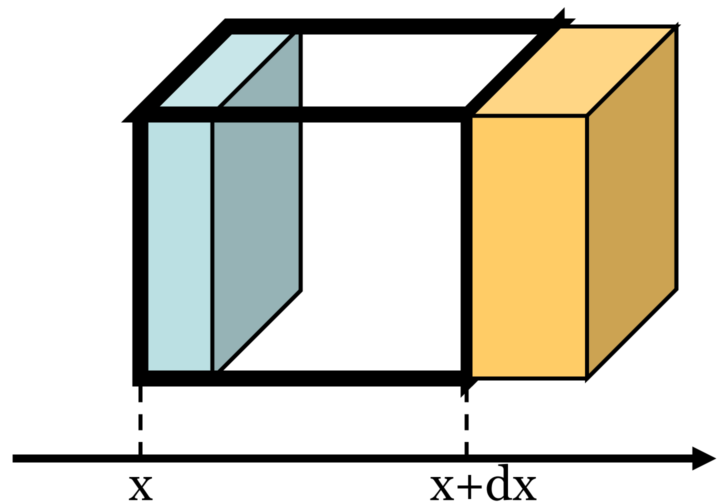
### Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Bilan de masse local :</u> exemple système 1D




*t*




*t+dt*

Bilan: variation de l'intérieur = ce qui rentre – ce qui sort

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

équation de continuité
(bilan de masse)

Nomenclature (bilan de masse [kg])
$\rho$ : densité de masse [kg/m³]
$\rho\vec{v}$ : vecteur densité de flux massique [kg/m²/s]
$\rho v$ dS : flux massique à travers la surface dS [kg/s]
(débit massique)

# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Cas densité constante en temps et espace</u> (cas particulier d'incompressibilité)

$\vec{v}.d\vec{S}$ Flux volumique à travers la surface $\vec{dS}$ [m³/s]

$\oiint_{\Sigma} \vec{v}.d\vec{S}$ Flux volumique à travers la surface Σ [m³/s]

$\vec{v}$ Vecteur densité de flux volumique [m/s = m³/s/m²]

<u>si $\rho$ = cte</u> :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

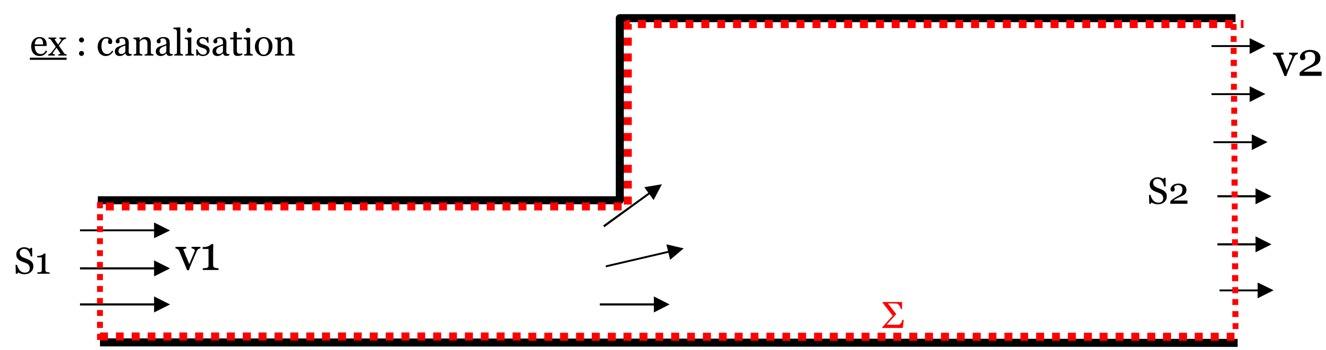
$$\downarrow$$

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v}.d\vec{S} = \underbrace{\iiint_{\vartheta} \mathrm{div}(\vec{v})dV}_{=0}$$

<u>ex</u> : canalisation




écoulement bouchon

écoulement bouchon

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v}.d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v}.d\vec{S} = v_2 S_2 - v_1 S_1$$

$v_1 S_1 = v_2 S_2$ conservation du débit vol.: volume entrant = volume sortant

# Equations locales

**Systèmes ouverts**

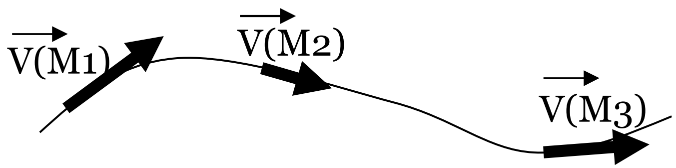
- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

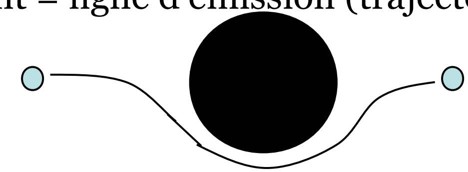
- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Lignes et tubes de courant :

Une ligne de courant à un instant *t* est la ligne en tout point tangente au vecteur vitesse $\vec{v}$

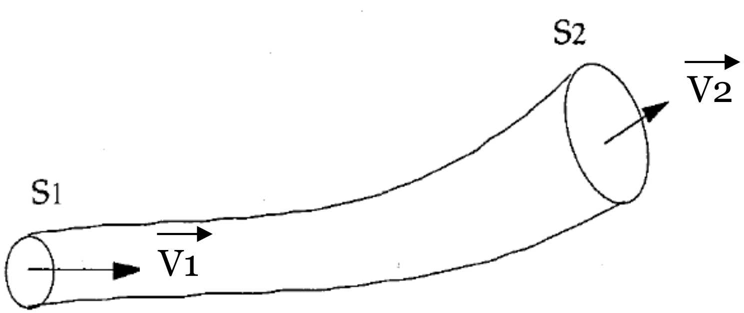



Cas écoulement stationnaire :
ligne de courant = ligne d'émission (trajectoire)



Un ensemble de points M(x,y,z) à *t* donné tq $d\vec{M} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

On appelle tube de courant, tout volume formé uniquement de lignes de courant




$$\iiint_{\vartheta_T} \mathrm{div}\vec{v} dV = \oiint_{\Sigma_T} \vec{v}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v}.d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v}.d\vec{S} = -S_1 v_1 + S_2 v_2$$

1) Le flux d'une grandeur convectée entrant/sortant d'un tube de courant se ramène au flux à travers ses extrémités

2) Pour un fluide incompressible ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$) le débit volumique (flux de volume) est constant à travers toute tranche d'un tube de courant

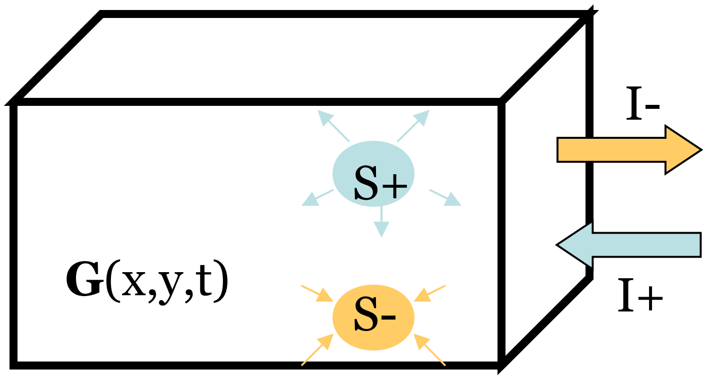
## Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

boîte fixe, position (x,y) donnée




## Bilan pour un système ouvert : grandeur **G** volumique

unité : [uG]

### bilan global :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = I + S = (I_+ - I_-) + (S_+ - S_-)$$

I : flux de G à travers la surface [uG/s] (échange)
S : intensité de production/destruction de G [uG/s] (source interne)

### bilan local :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = s}$$

$$\left\{\begin{array}{l} G = \displaystyle\iiint_{\vartheta} g dV \\ I = -\displaystyle\oiint_{\Sigma} \vec{j}.d\vec{S} = -\iiint_{\vartheta} \mathrm{div}\vec{j} dV \\ S = \displaystyle\iiint_{\vartheta} s dV \end{array}\right.$$

*g* : densité volumique de G [uG/m³]

*j* : vecteur densité de flux de G [uG/m²/s]

*s* : source volumique de G par unité de temps [uG/m³/s]

Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

<u>Exercice :</u> écriture du bilan de quantité de mouvement sous forme de bilan local

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{v}\right)=-\vec{\text{grad}}P+\eta\Delta\vec{v}+\vec{f}$$

(hyp: $\rho$ constante + fluide newtonien)

G=quantité de mouvement suivant x (par ex.)

$$g=\rho v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)=\rho\frac{\partial}{\partial t}v_x=-\rho\vec{v}.\vec{\text{grad}}v_x-\frac{\partial}{\partial x}P+\eta\Delta v_x+f_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)=-\rho\text{div}(v_x\vec{v})-\text{div}(P\vec{e}_x)+\eta\text{div}(\vec{\text{grad}}v_x)+f_x$$

$$\begin{cases}\text{div}(v_x\vec{v})=\underbrace{\cancel{v_x\text{div}(\vec{v})}}_{\text{incompressible}}+\vec{\text{grad}}v_x.\vec{v}\\ \Delta v_x=\text{div}(\vec{\text{grad}}v_x)\\ \frac{\partial}{\partial x}P=\text{div}(P\vec{e}_x)\end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)}_{\text{variation volumique}}+\text{div}\underbrace{\left(\boxed{\rho v_x\vec{v}}+P\vec{e}_x\boxed{-\frac{\eta}{\rho}\vec{\text{grad}}\rho v_x}\right)}_{\text{vecteur densité de flux (échange)}}=\underbrace{f_x}_{\text{source interne}}$$

convectif

diffusif, $\nu=\eta/\rho$ viscosité cinématique coefficient de diffusion [m²/s]

# Equations locales

**Systèmes ouverts**

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Système d'équations

### fluide parfait

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -\vec{\mathrm{grad}}P + \vec{f} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho = f(P) \end{cases}$$

### fluide cas général

(au programme, seulement incompressible)

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}}_{\text{convection}}\right) = -\vec{\mathrm{grad}}P + \underbrace{\eta\Delta\vec{v}}_{\text{diffusion}} + \vec{f} \\ \mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \\ \rho = \mathrm{constante} \end{cases}$$

# Equations locales

Systèmes ouverts

- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Ecoulements particuliers :

écoulement incompressible : la densité d'une particule fluide que l'on suit au cours du temps reste constante.
En tout point on a :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \iff \mathrm{div}\vec{v} = 0$$

il existe un vecteur $\vec{A}(\vec{r},t)$ tel que $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A}$.
A 2D (écoulement dans le plan (Oxy)) on peut prendre $\vec{A} = \psi\vec{e}_z$
$\Psi$ est appelée fonction courant

écoulement irrotationnel : la rotation locale d'une particule fluide est nulle.
En tout point on a :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} = \vec{0}$$

il existe une fonction scalaire $\phi(\vec{r},t)$ telle que $\vec{v} = \vec{\mathrm{grad}}\phi$.
$\phi$ est appelée fonction potentiel

analogie électromagnétisme

# Equations locales

## Systèmes ouverts

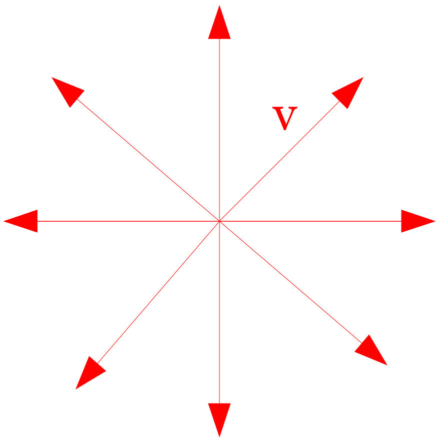
- Notion de particule fluide
- Approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Ecoulements particuliers : exemples

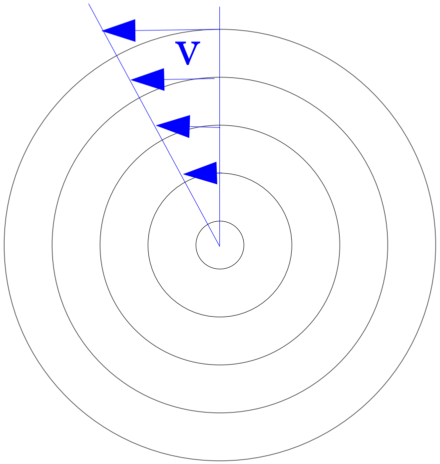
source volumique




$\mathrm{div}\vec{v} = 0$ partout sauf au point source et $\vec{v} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.
Pour tout volume $\vartheta$ de surface $\Sigma$ englobant la source, on a

$$D = \oiint_{\Sigma} \vec{v}.\vec{dS} = \iiint_{\vartheta} \mathrm{div}(\vec{v})dV \neq 0$$

rotation en bloc autour de Oz




Le champ de vitesse est donné par $\vec{v} = \beta r\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.
On a $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} \neq \vec{0}$ et on peut définir le vecteur tourbillon. $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}$.
$\Omega = \beta$ vitesse angulaire de la rotation en bloc

# Méthodologie

## Mécanique du solide

- référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

solides

liquides

## Systèmes ouverts

- notion de particule fluide
- approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

## Acoustique (fluide *presque* au repos)

- approximation acoustique
- application gaz parfait
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- ondes stationnaires et modes propres
- transmission-réflexion entre 2 milieux (impédance acoustique)

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère
- phénomène de couche limite et portance

# Statique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

### équations du fluide parfait

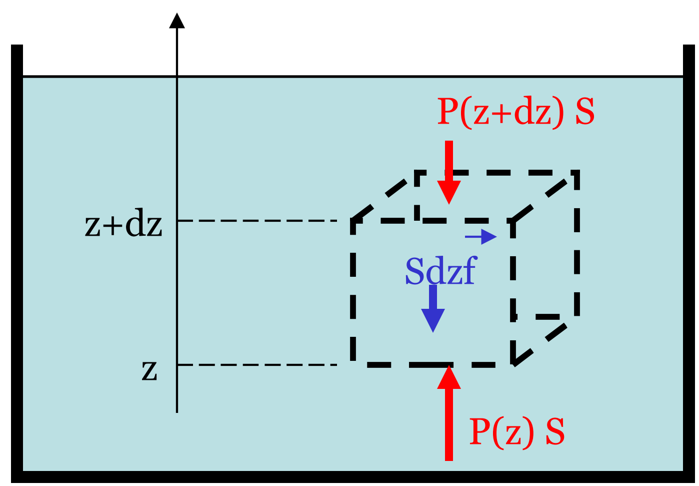
$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -\vec{\mathrm{grad}}P + \vec{f} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho = f(P) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}$$

### équations de la statique des fluides

$$\begin{cases} \vec{0} = -\vec{\mathrm{grad}}P + \vec{f} \\ \rho = f(P) \end{cases}$$



# Statique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

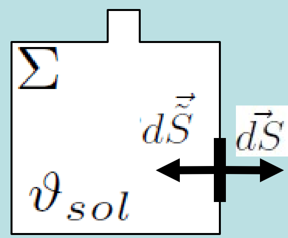
Principe d'Archimède

"Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède"

ATTENTION valable seulement en statique,
et non pas si il y a écoulement autour de l'objet

fluide au repos
éq. statique des fluides

$$\vec{0} = -\vec{\mathrm{grad}}P + \rho_{liq}\vec{g}$$




$$\vec{F}_p = \oiint_{\Sigma} P d\vec{\tilde{S}} = -\oiint_{\Sigma} P d\vec{S} = -\iiint_{\vartheta_{sol}} \vec{\mathrm{grad}} P dV = -\iiint_{\vartheta_{sol}} \rho_{liq}\vec{g} dV = \rho_{liq}\vartheta_{sol}(-\vec{g})$$

# Statique des fluides

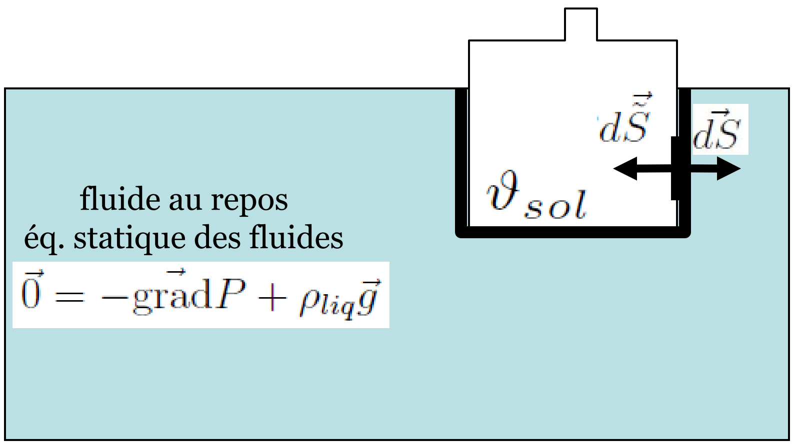
## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

Principe d'Archimède




$$\vec{0} = -\vec{\mathrm{grad}}\,P + \rho_{liq}\vec{g}$$

# Statique des fluides

## Equations locales

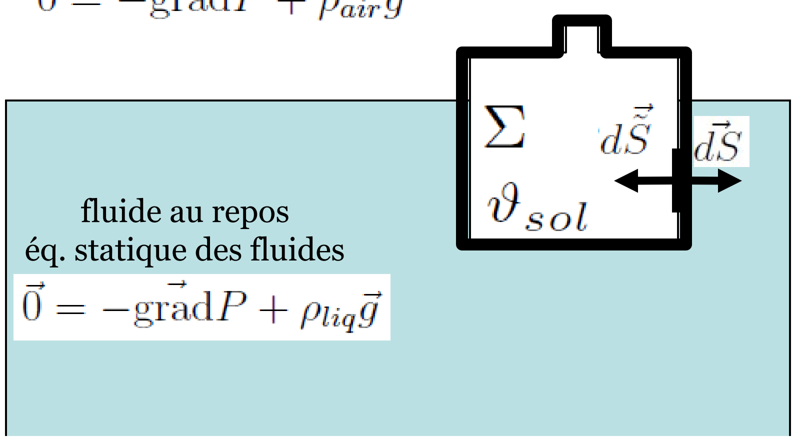
- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

Principe d'Archimède

$$\vec{0} = -\vec{\text{grad}}P + \rho_{air}\vec{g}$$




$$\vec{F}_p = \oiint_{\Sigma} P\,d\vec{\tilde{S}} = -\oiint_{\Sigma} P\,d\vec{S} = -\iiint_{\vartheta_{sol}} \vec{\text{grad}}P\,dV = \iiint_{\vartheta_{sol/liq}} \vec{\text{grad}}P\,dV + \iiint_{\vartheta_{sol/air}} \vec{\text{grad}}P\,dV$$

$$= -\iiint_{\vartheta_{sol/liq}} \rho_{liq}\vec{g}\,dV - \cancel{\iiint_{\vartheta_{sol/air}} \rho_{air}\vec{g}\,dV}$$

négligeable

# Statique des fluides

### Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

$\longrightarrow$

### Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

Atmosphère isotherme

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = -\vec{\mathrm{grad}}\, P + \rho \vec{g} \\ \\ P = \dfrac{RT}{\mathcal{M}} \rho \end{array} \right.$$

Hyp : gaz parfait
T uniforme et constante

Données : $T$ = 15°C
$Mair$=29 g/mol
$R$ = 8.3 J/mol/K
$g$ = 9.8 m/s²

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0 \exp^{-z/H}}$$

<u>Exercice</u> : trouver H à partir de l'unité des données
H = ??

# Statique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

$\longrightarrow$

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

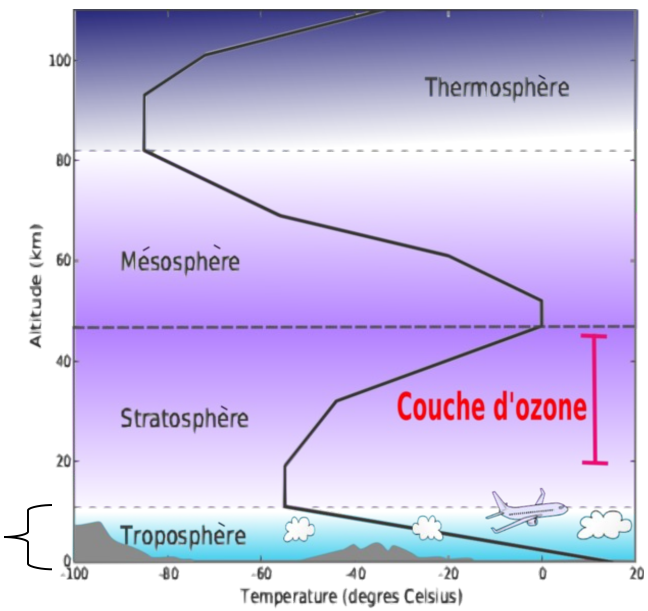
Atmosphère isotherme

$$\begin{cases} \vec{0} = -\vec{\text{grad}}\,P + \rho\vec{g} \\ P = \dfrac{RT}{\mathcal{M}}\rho \end{cases}$$

Hyp : gaz parfait
T uniforme et constante

Données : $T$ = 15°C
$Mair$=29 g/mol
$R$ = 8.3 J/mol/K
$g$ = 9.8 m/s²

limitations hypothèse T constante :




$$\left.\begin{matrix}80\% \\ \text{masse}\end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0 \exp^{-z/H}}$$

$$RT \leftrightarrow \mathcal{M}gH[J/mol]$$

$$H = \frac{RT}{\mathcal{M}g}$$

$H$ ~ 10 km

# Méthodologie

Mécanique du solide

- référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

solides

liquides

Systèmes ouverts

- notion de particule fluide
- approches Lagrangienne et Eulérienne

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

Statique des fluides
(fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère
- phénomène de couche limite et portance

Acoustique
(fluide *presque* au repos)

- approximation acoustique
- application gaz parfait
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- ondes stationnaires et modes propres
- transmission-réflexion entre 2 milieux (impédance acoustique)

# Dynamique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Nombre de Reynolds

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v} = -\vec{\mathrm{grad}}P + \eta\Delta\vec{v}$$

hyp : écoulement incompressible
fluide newtonien

ordre de grandeur : $\frac{\rho V}{T}$ $\quad \frac{\rho V^2}{L}$ $\quad \frac{P}{L}$ $\quad \frac{\eta V}{L^2}$

$$\boxed{Re = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\frac{\rho V^2}{L}}{\frac{\eta V}{L^2}} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}}$$

Re << 1 : terme visqueux >> terme convectif
Re >> 1 : terme convectif >> terme visqueux

| | eau | air |
|---|---|---|
| À fluide donné: Re << 1 faibles L, V | capillaires sanguins | alvéoles (poumon) |
| Re >> 1 forts L, V | nageur | explosion, aviation, météo |

# Dynamique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Nombre de Reynolds

ordre de grandeur :

| | viscosité dynamique | densité | viscosité cinématique |
|---|---|---|---|
| | Pa.s | $kg.m^{-3}$ | $m^2.s^{-1}$ |
| eau | $10^{-3}$ | 1000 | $10^{-6}$ |
| air | $10^{-5}$ | 1 | $10^{-5}$ |
| miel | $10^{1}$ | 1000 | $10^{-2}$ |
| glycérine | 1 | 1000 | $10^{-3}$ |
| bitume | $10^{8}$ | 1000 | $10^{5}$ |
| sang (37° C) | $10^{-2}$ | 1000 | $10^{-5}$ |
| hélium 4 liquide (2 K) | $10^{-6}$ | 100 | $10^{-8}$ |
| manteau supérieur (1000° C ) | $10^{19} - 10^{24}$ | 1000-10000 | $10^{16} - 10^{20}$ |

# Dynamique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

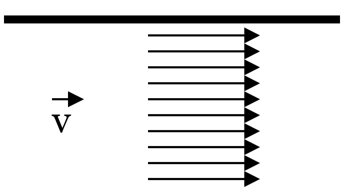
## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

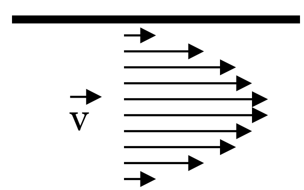
## Nombre de Reynolds

| Étage | Aorte | Grosses artères | Branches artérielles | Artérioles | Capillaires |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 1 | 40 | 7 100 | $1{,}6 \times 10^{8}$ | $5{,}5 \times 10^{9}$ |
| $d$ (cm) | 2,6 | 0,8 | 0,06 | 0,002 | 0,0009 |
| $S$ (cm$^2$) | 5,3 | 20 | 20 | 500 | 3 500 |
| $V$ (cm$^3$) | 180 | 250 | 250 | 125 | 300 |
| $L$ (cm) | 34 | 12,5 | 12,5 | 0,25 | 0,086 |
| $U$ (cm/s) | 16 | 4,2 | 4,2 | 0,17 | 0,024 |
| $Re$ | 690 | 56 | 4,2 | $5{,}7 \times 10^{-3}$ | $3{,}6 \times 10^{-4}$ |
| $\Delta p$ (Pa) | | 7,8 | $1{,}4 \times 10^{3}$ | $1{,}0 \times 10^{3}$ | $2{,}4 \times 10^{2}$ |

Un fluide n'est pas visqueux ou non, MAIS l'écoulement est visqueux ou non




écoulement bouchon




écoulement Poiseuille

# Dynamique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Re << 1 : écoulement visqueux

Équations : $\vec{0} = -\vec{\mathrm{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}$

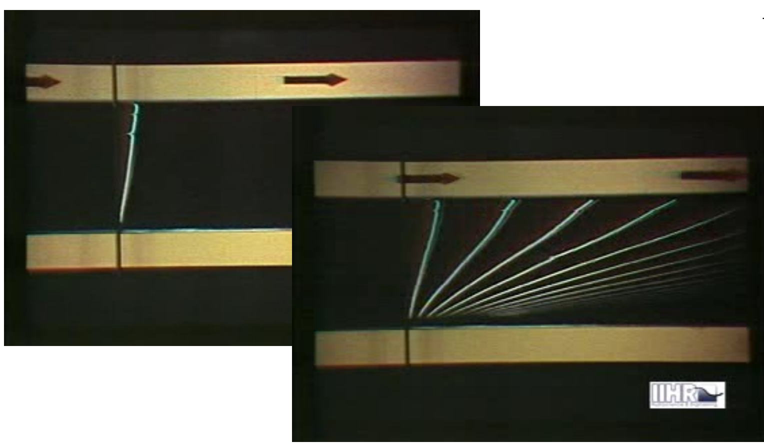
$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

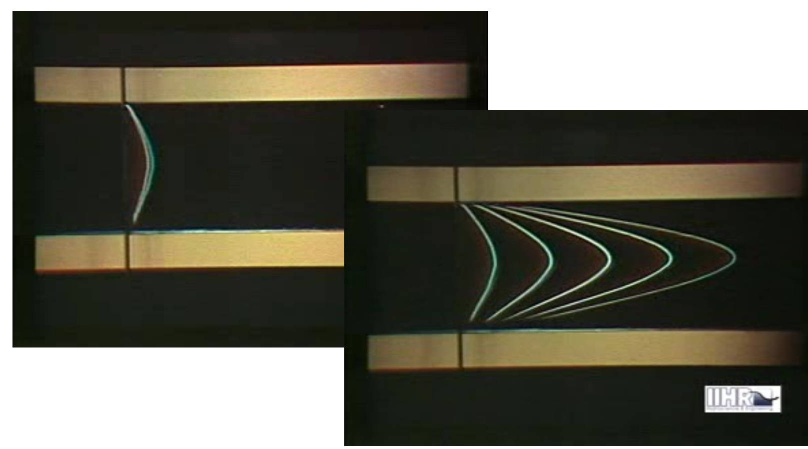
Solution : dépend des conditions aux limites

Écoulement de Couette

Écoulement de Poiseuille

visualisation:
bulles d'hydrogène





CL imposée

V=$V_0$ en haut
V=0 en bas

V=0 en bas et en haut
$P_{gauche}-P_{droite}>0$

V=$V_{solide}$ à l'interface solide/liquide

# Dynamique des fluides

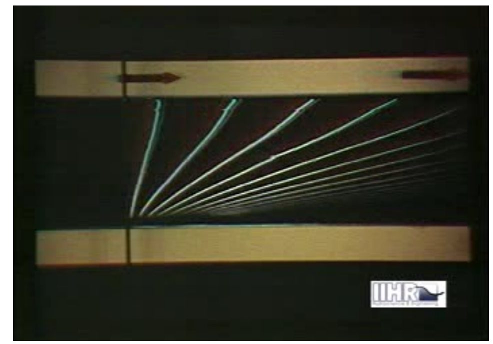
## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Re << 1 : écoulement visqueux




$y$ $x$

Équations : $\vec{0} = -\vec{\mathrm{grad}}P + \eta\Delta\vec{v}$

$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

Écoulement de Couette : CL imposée V=$V_0$ en haut, V=0 en bas

1) invariance suivant la direction x : $P = P(y)$, $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x + v_y(y)\vec{e}_y$

2) incompressibilité : $\frac{\partial}{\partial x}v_x(y) + \frac{\partial}{\partial y}v_y(y) = 0 \rightarrow v_y(y) = \text{constante} \rightarrow v_y(y) = 0$

3) projection navier-Stokes suivant $\vec{e}_x$:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}P(y) + \eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_x(y) + \eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_x(y) \rightarrow 0 = \eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_x(y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_x(y) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}v_x(y) = C_1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}v_x(y) = C_1 y + C_2 \rightarrow v_x(y) = \frac{V_0}{d}y$$

CL

4) projection navier-Stokes suivant $\vec{e}_y$:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y}P(y) \rightarrow P = \text{constante}$$

5) estimation force : $F_T/\mathcal{A} = \eta\frac{\partial}{\partial y}v_x = \eta V_0/d$

# Dynamique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v} = -\vec{\mathrm{grad}}P + \cancel{\eta \Delta \vec{v}} + \vec{f}$$

pb : 2nd terme non-linéaire
**difficile (impossible)** à résoudre analytiquement

<u>Fluide parfait</u> : tout phénomène diffusif est négligé

# Dynamique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}=-\vec{\mathrm{grad}}P+\cancel{\eta\Delta\vec{v}}+\vec{f}$$

pb : 2nd terme non-linéaire **difficile (impossible)** à résoudre analytiquement

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\rho\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}=-\vec{\mathrm{grad}}P+\vec{f}$$

$\vec{f}=-\vec{\mathrm{grad}}\varphi$ $\quad\varphi$ énergie potentielle volumique

$\rho=$ constante

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\mathrm{grad}}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi\right)-\rho\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}=\vec{0}$$

simplifications : relations de Bernoulli

<u>irrotationnel</u>

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}=\vec{0}\leftrightarrow\vec{v}=\vec{\mathrm{grad}}\phi$$

$$\vec{\mathrm{grad}}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi\right)=\vec{0}$$

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi=\mathrm{constante(t)}$$

<u>irrotationnel + stationnaire</u>

$$\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi=\mathrm{constante}$$

conservation d'énergie volumique

# Dynamique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}=-\vec{\mathrm{grad}}P+\cancel{\eta\Delta\vec{v}}+\vec{f}$$

pb : 2nd terme non-linéaire **difficile (impossible)** à résoudre analytiquement

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\rho\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}=-\vec{\mathrm{grad}}P+\vec{f}$$

$\vec{f}=-\vec{\mathrm{grad}}\varphi$ $\quad\varphi$ énergie potentielle volumique

$\rho=$ constante

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\mathrm{grad}}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi\right)-\rho\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}=\vec{0}$$

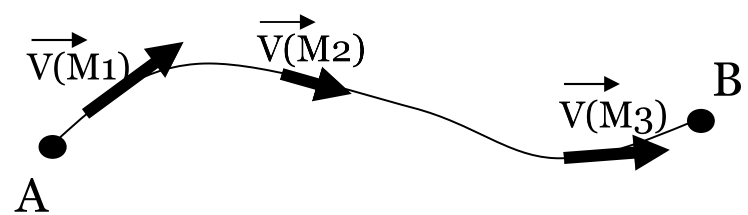
simplifications : relations de Bernoulli

<u>stationnaire : utilisation lignes de courant</u>

$$\int_A^B\vec{\mathrm{grad}}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi\right).d\vec{M}-\int_A^B\rho\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}.d\vec{M}=0$$

$$\int_A^B d\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\varphi\right)=0$$

$$\rho\frac{v_A^2}{2}+P_A+\varphi_A=\rho\frac{v_B^2}{2}+P_B+\varphi_B$$




(conservation énergie vol. le long d'une ligne de courant)

# Dynamique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

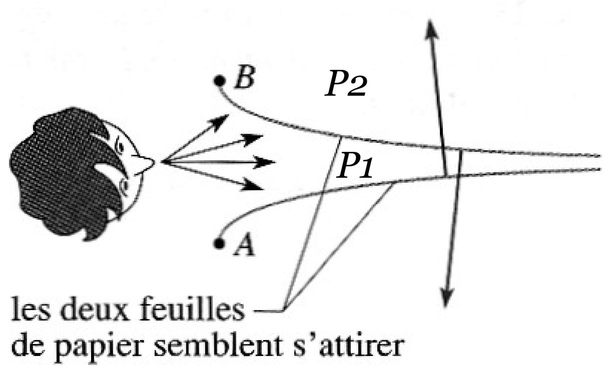
## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

applications : effet Venturi: pression diminue là où ca va vite

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$$

(hyp: incompressible, irrotationnel, stationnaire)

cas 1 : expérience simple




*P2 > P1*

# Dynamique des fluides

### Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

### Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

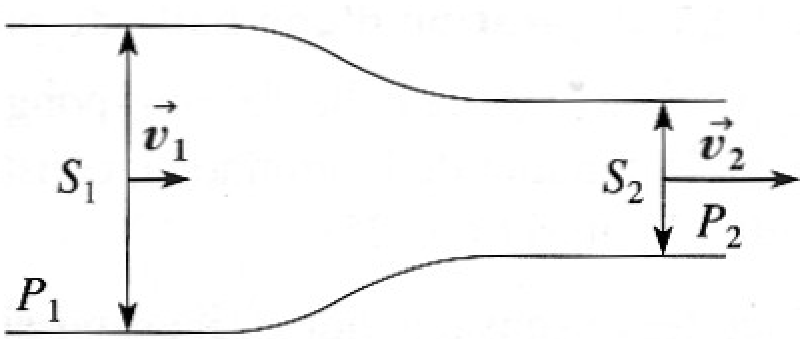
## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

applications : effet Venturi: pression diminue là où ca va vite

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$$

(hyp: incompressible, irrotationnel, stationnaire)

cas 2 : tube Venturi




$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]$$

→ Mesure *P1-P2* donne *v1*

# Dynamique des fluides

### Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

### Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

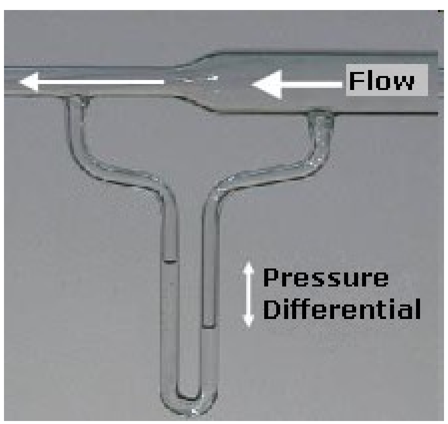
## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

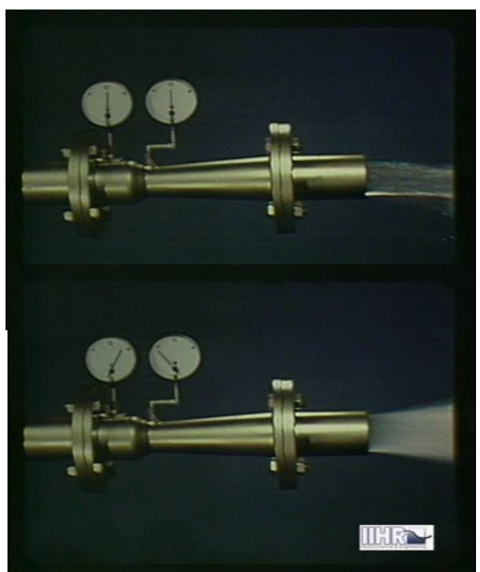
applications : effet Venturi: pression diminue là où ca va vite

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$$

(hyp: incompressible, irrotationnel, stationnaire)

cas 2 : tube Venturi



$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Mesure *P1-P2* donne *v1*

# Dynamique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

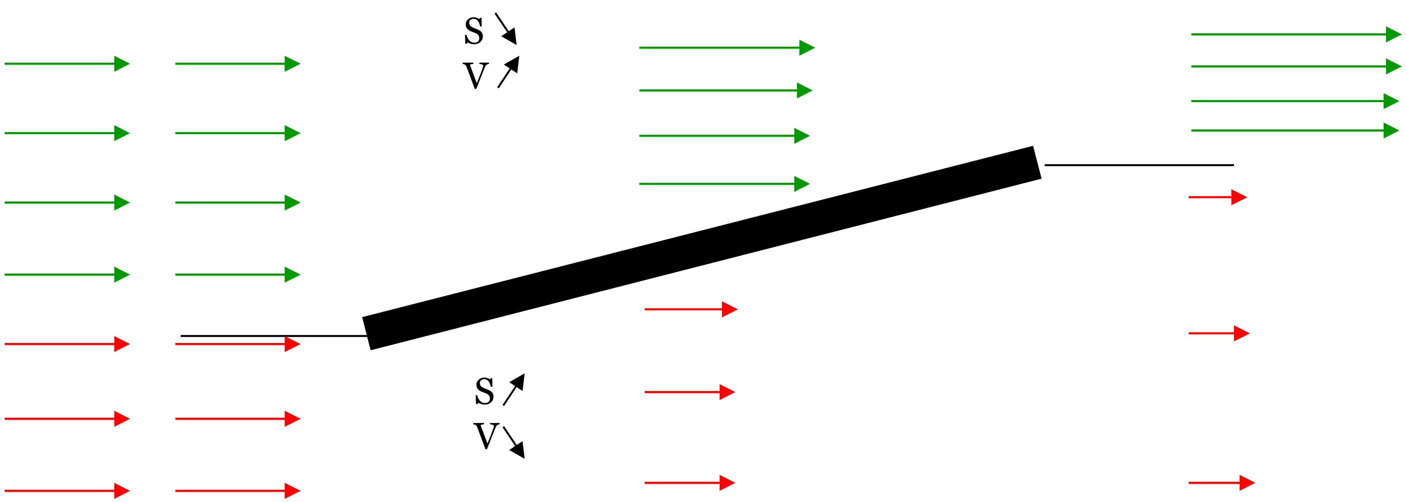
## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

**Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli**

applications : effet Venturi: pression diminue là où ca va vite

cas 3 : notion de portance



# Dynamique des fluides

**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

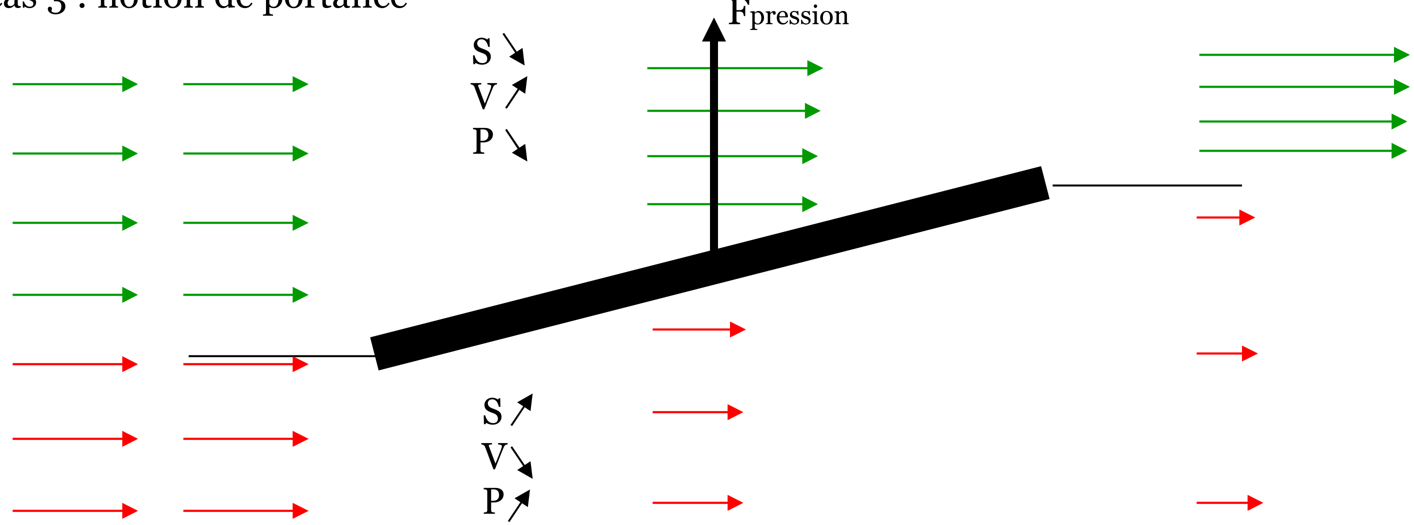
**Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)**

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Re >> 1 : approximation fluide parfait et relations de Bernoulli

applications : effet Venturi: pression diminue là où ca va vite

cas 3 : notion de portance




<u>vocabulaire</u>: pt arrêt, portance, traînée, angle d'attaque, extrados, intrados
<u>attention</u>: connaître limitations: pas de portance si purement parfait, rôle de la couche limite et des extrémités anguleuses

# Dynamique des fluides

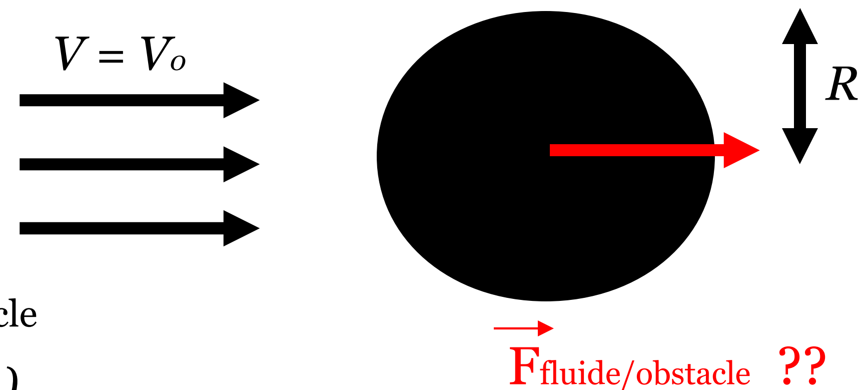
## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Ecoulement autour d'une sphère




cas Re<<1

**approche complète :**

1) Calculer champs de pression et vitesse autour de l'obstacle

$$\vec{0} = -\vec{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v} \quad + CL\ (V_o, R)$$

2) Intégrer les contraintes normales et tangentielles à la surface de l'obstacle

**approche dimensionnelle :**

⇨ construire F à partir de $V_o$, R et $\eta$

unité: F [N]
$\eta$ [Pa.s = N.s.m$^{-2}$]
R [m]
$V_o$ [m.s$^{-1}$]

$$F \sim \eta R V_o$$

calcul exact : $F_{fl/obs} = 6\pi\,\eta R V_o$ — formule de Stokes

# Dynamique des fluides

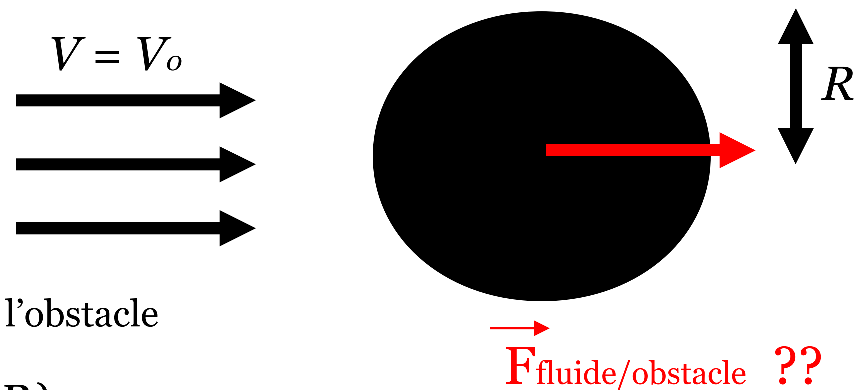
**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

**Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)**

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Ecoulement autour d'une sphère




<u>cas fluide parfait</u>

**approche complète** :

1) Calculer champs de pression et vitesse autour de l'obstacle

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}=-\vec{\mathrm{grad}}\,P \quad + CL\ (V_0, R)$$

2) Intégrer les contraintes normales à la surface de l'obstacle

**approche dimensionnelle** :

⇨ construire F à partir de $V_0$, R et ρ

# Dynamique des fluides

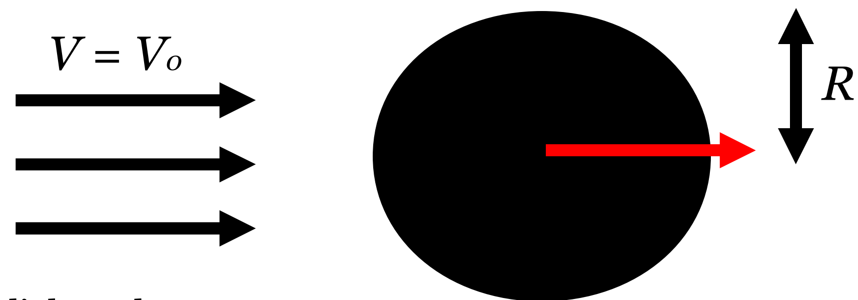
**Equations locales**

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

**Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)**

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Ecoulement autour d'une sphère




$\vec{F}_{\text{fluide/obstacle}}$ ??

<u>cas fluide parfait</u>

**approche complète** :

1) Calculer champs de pression et vitesse autour de l'obstacle

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}=-\vec{\mathrm{grad}}P \quad + CL\ (V_O, R)$$

2) Intégrer les contraintes normales à la surface de l'obstacle

**approche dimensionnelle** :

⇨ construire F à partir de Vo, R et ρ

$$\left.\begin{array}{ll} \text{unité: } F & [N = kg.m.s^{-2}] \\ \rho & [kg.m^{-3}] \\ R & [m] \\ V_O & [m.s^{-1}] \end{array}\right\} \quad F \sim \rho R^2 V_O^{\,2}$$

# Dynamique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

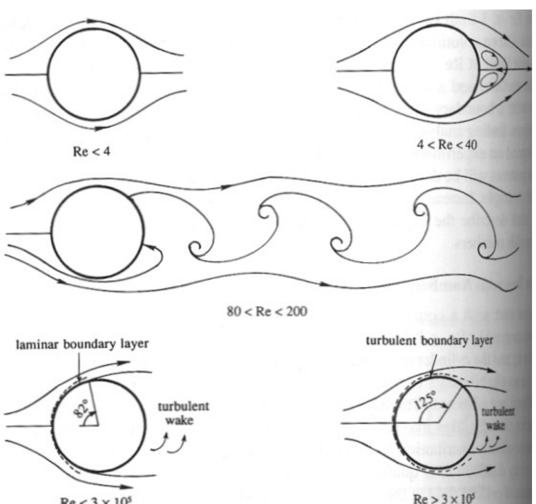
Dynamiques des fluides
(fluide en mouvement)

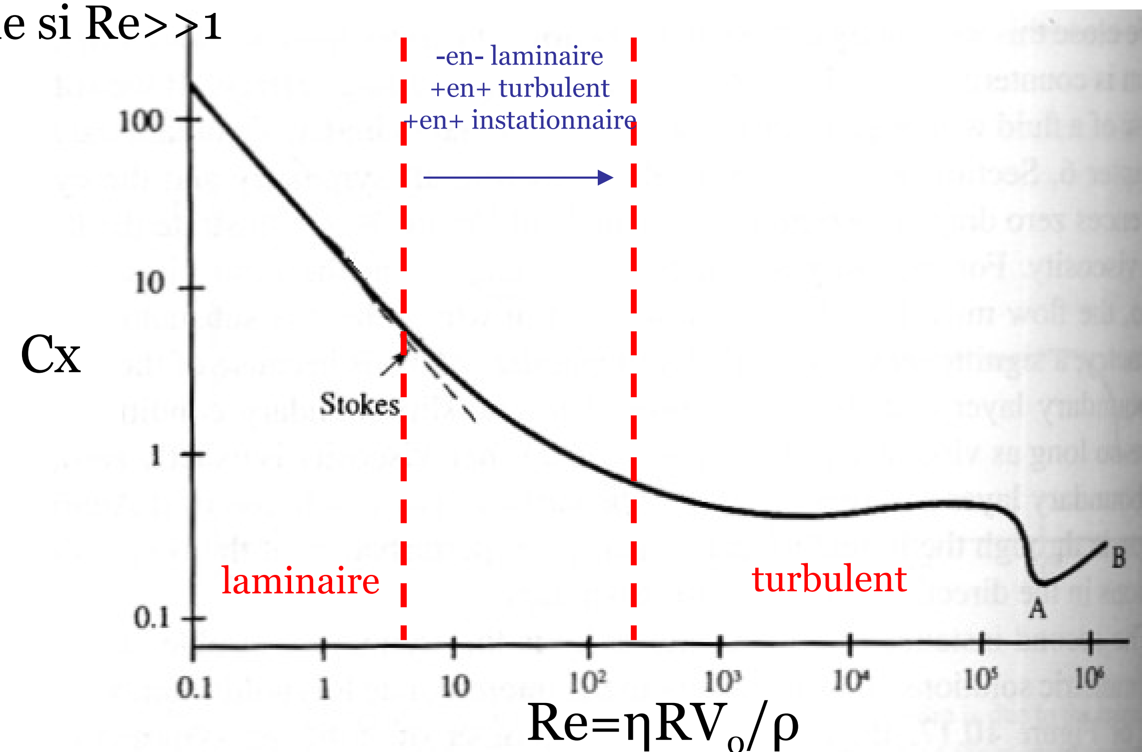
- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère

## Ecoulement autour d'une sphère

**<u>cas réél:</u>** limite du modèle de fluide parfait
dépendance en Re même si Re>>1

$$C_x = \frac{F_{flu/obs}}{\frac{1}{2}\rho(\pi R^2)V_0^2}$$




http://www.youtube.com/watch?v=_AJgEa2dbJU

# Méthodologie

solides

liquides

## Mécanique du solide

- référentiel galiléen
- système fermé
- principe fondamental de la dynamique
- théorème énergie cinétique

## Systèmes ouverts

- notion de particule fluide
- approches Lagrangienne et Eulérienne

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert
- écoulements particuliers

## Statique des fluides (fluide au repos)

- fluide dans le champ de pesanteur
- poussée d'Archimède
- atmosphère isotherme d'un gaz parfait

## Dynamiques des fluides (fluide en mouvement)

- nombre de Reynolds
- écoulements à bas Re
- fluide parfait et relations de Bernoulli
- écoulements autour d'une sphère
- phénomène de couche limite et portance

## Acoustique (fluide *presque* au repos)

- approximation acoustique
- application gaz parfait
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- ondes stationnaires et modes propres
- transmission-réflexion entre 2 milieux (impédance acoustique)

# Acoustique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Acoustique des fluides
(fluide presque au repos)

- approximation acoustique
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- application gaz parfait

## Approximation acoustique

onde acoustique = perturbation de la pression du liquide
cette perturbation se propage à la vitesse du son

diagramme de Fletcher et Munson, 1933
intensité x2 -> dB + 3

ex : son: domaine audible
air, $c_s \sim 340$ m/s

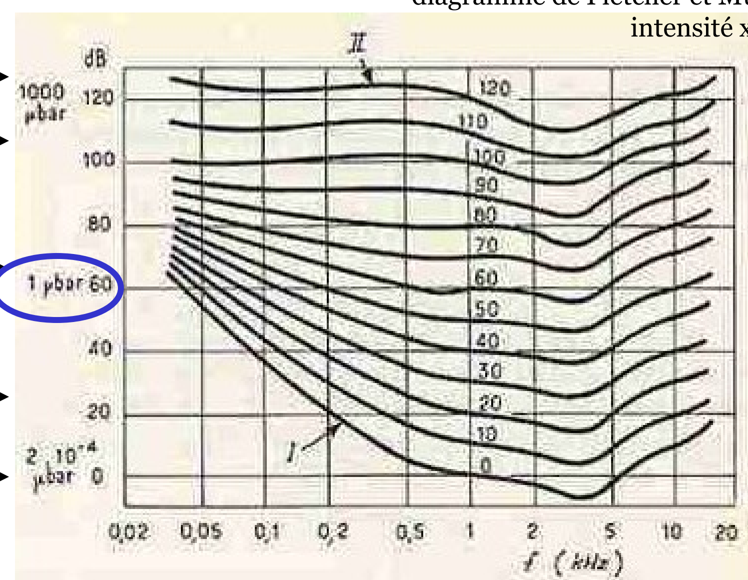
seuil de douleur

marteau-piqueur

conversation courante

chuchotement

seuil d'audibilité




$\boxed{P_{perturbation} << P_{atm}}$

INFRASON AUDIBLE ULTRASON

# Acoustique des fluides

Equations locales

- •équation de Navier-Stokes
- •équation de continuité (masse)
- •bilans pour un système ouvert

Acoustique des fluides
(fluide presque au repos)

- •approximation acoustique
- •éq. d'ondes (D'Alembert)
- •ondes progressives, vitesses de propagation
- •application gaz parfait

## Approximation acoustique

à 1D

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t) \qquad \rho_0 >> \tilde{\rho}$$

$$\vec{v} = \tilde{v}(x,t)\vec{e}_x$$

$$P = P_0 + \tilde{P}(x,t) \qquad P_0 >> \tilde{P}$$

conservation de la masse

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\rho_0 + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0\tilde{v}(x,t)) + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\rho}(x,t)\tilde{v}(x,t)) \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(x,t) + \rho_0\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}(x,t) + \tilde{\rho}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}(x,t) + \tilde{v}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\rho}(x,t)
\end{aligned}$$

**ordre 1**

ordre 2, négligeable devant ordre 1

$$\boxed{0 = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(x,t) + \rho_0\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}(x,t)}$$ (éq. linéaire)

# Acoustique des fluides

Equations locales

- •équation de Navier-Stokes
- •équation de continuité (masse)
- •bilans pour un système ouvert

Acoustique des fluides
(fluide presque au repos)

- •approximation acoustique
- •éq. d'ondes (D'Alembert)
- •ondes progressives, vitesses de propagation
- •application gaz parfait

## Approximation acoustique

à 1D
$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t) & \rho_0 &>> \tilde{\rho} \\ \vec{v} &= \tilde{v}(x,t)\vec{e}_x & & \\ P &= P_0 + \tilde{P}(x,t) & P_0 &>> \tilde{P} \end{aligned}$$

éq. Euler
$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v} &= -\vec{\mathrm{grad}}P \\ \rho\frac{\partial}{\partial t}v + \rho v\frac{\partial}{\partial x}v &= -\frac{\partial}{\partial x}P \\ \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v} + \tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v} + \rho_0\tilde{v}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v} &= -\frac{\partial}{\partial x}\tilde{P} \end{aligned}$$

**ordre 1** ordre 2 ordre 3 **ordre 1**

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\tilde{P}(x,t)}$$ (éq. linéaire)

# Acoustique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

$\longrightarrow$

Acoustique des fluides
(fluide presque au repos)

- approximation acoustique
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- application gaz parfait

## Approximation acoustique

à 1D
$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t) \qquad \rho_0 >> \tilde{\rho}$$
$$\vec{v} = \tilde{v}(x,t)\vec{e}_x$$
$$P = P_0 + \tilde{P}(x,t) \qquad P_0 >> \tilde{P}$$

choix :
$$P/\rho = C_1 \qquad \text{(gaz parfait isotherme)}$$
$$P/\rho^\gamma = C_2 \qquad \text{(gaz parfait adiabatique)}$$

$$P_0 + \tilde{P} = C_2(\rho_0+\tilde{\rho})^\gamma = C_2\rho_0^\gamma\left(1+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)^\gamma = C_2 \times \rho_0^\gamma\left(1+\gamma\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} + \Theta(\tilde{\rho}/\rho_0)^2\right)$$
$$\tilde{P} = C_2\rho_0^{\gamma-1}\gamma\tilde{\rho}$$
$$\tilde{P}(x,t) = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}\tilde{\rho}(x,t)$$

$$\boxed{\tilde{P}(x,t) = \frac{1}{\rho_0\chi}\tilde{\rho}(x,t)} \qquad \text{(éq. linéaire)}$$

$\chi$ compressibilité

# Acoustique des fluides

Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

Acoustique des fluides
(fluide presque au repos)

- approximation acoustique
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- application gaz parfait

## Approximation acoustique

à 1D

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t) \qquad \rho_0 >> \tilde{\rho}$$
$$\vec{v} = \tilde{v}(x,t)\vec{e}_x$$
$$P = P_0 + \tilde{P}(x,t) \qquad P_0 >> \tilde{P}$$

système linéaire

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(x,t) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}(x,t) \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\tilde{v}(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\tilde{P}(x,t) \\ \tilde{P}(x,t) = \frac{1}{\rho_0 \chi}\tilde{\rho}(x,t) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{P}(x,t) = c_s \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{P}(x,t)$$

avec $c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$

FORME GENERIQUE
PROPAGATION D'ONDES
NON DISPERSIVES
équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot = c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot}$$

Pb physique : $c$, vitesse de l'onde
mécanique : chaînes d'oscillateurs identiques
électro-magnétisme : propagation de la lumière
fluide : onde de compression

# Acoustique des fluides

### Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

### Acoustique des fluides (fluide presque au repos)

- approximation acoustique
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- application gaz parfait

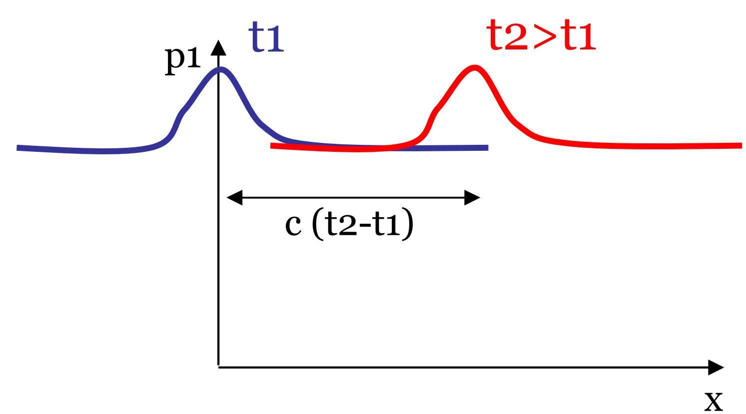
**Recherche de solution** $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot$$

Toute solution de cette équation peut se mettre sous la forme d'une somme de deux ondes progressives :
une se propageant vers les x croissants, une se propageant vers les x décroissants

$$P(x,t) = p_1(x-ct) + p_2(x+ct)$$

se propage vers les x croissants

se propage vers les x décroissants




exemple de perturbation se propageant vers les x croissants

# Acoustique des fluides

## Equations locales

- équation de Navier-Stokes
- équation de continuité (masse)
- bilans pour un système ouvert

## Acoustique des fluides (fluide presque au repos)

- approximation acoustique
- éq. d'ondes (D'Alembert)
- ondes progressives, vitesses de propagation
- application gaz parfait

**Recherche de solution** $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot$$

L'équation étant linéaire, on peut choisir de rechercher des solutions sinusoidales (ou harmoniques).
Toute solution peut être ramenée à une somme de solutions sinusoidales par la transformée de Fourier.
On parle d'Onde Plane Progressive Harmonique, les solutions de la forme :

$$P(x,t) = A\cos(k.x - \omega.t + \varphi)$$

Toujours lié à la linéarité des équations, on peut utiliser le formalisme complexe (cf cours électrocinétique) pour résoudre les équations.

$$\underline{P}(x,t) = Ae^{i(k.x-\omega.t+\varphi)} = \underline{A}e^{i(k.x-\omega.t)}$$

$$\underline{A} = Ae^{i\varphi}$$

$$P(x,t) = \mathbf{Re}[\underline{P}(x,t)]$$