Licence3 : chapitre 1
Espace et temps en physique

Bertrand Chauvineau

Université Côte d’Azur

Observatoire de la Côte d’Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

1 – Espace, temps, espace-temps, intervalle invariant

espace (3 dim) = l’ensemble de tous les lieux possibles (→ longueurs, angles)

temps (1 dim) = l’ensemble de toutes les dates possibles (→ intervalles de temps)

espace-temps **(4 dim) = l’ensemble de tous les événements possibles**

un événement(t,x,y,z) = une date(t) + un lieu(x,y,z)

l’espace-temps = le cadre de travail naturel du physicien :
c’est dans l’esp-tps que prennent place les événements et les lois de la physique
(qui imposent certains liens entre ce qui se passe en différents événements)

- La réalisation de mesures précises & leur interprétation …
- La construction de théories fiables (permettant de faire des « prédictions » utilisables) …

… requièrent une description $\underbrace{\text{préalable}}_{\boxed{???}}$ précise des $\underbrace{\text{propriétés de l'esp-tps}}_{\boxed{\text{une théorie de l'esp-tps est nécessaire}}}$

Donc, la procédure (semblant) naturelle :

- faire d'abord une **théorie** de l'espace-temps …
- … puis (seconde étape) des théories physiques

… ou ...
… les deux en même temps ?

Bien distinguer :

- l' **espace-temps réel** (le notre !) : ses **propriétés sont … ce qu'elles sont**, mais (1) nous sont inconnues a priori; cependant (2) on peut y accéder approximativement par le biais d'**expériences/observations**

- **les** espace-temps **théoriques** : leurs **propriétés étant ce qu'on décide**, de telle sorte que : (1) on les connait parfaitement, & (2) on peut faire des **prédictions** arbitrairement précises (si on peut s'en sortir avec les calculs …)

Comparer & conclure quant à l'intérêt pratique de l'esp-tps théorique considéré

➔ **Espace-temps théoriques** : comment les définir ?

Soient P & Q deux événements voisins (lieux voisins, dates voisines).

Les esp-tps que nous définirons seront ***localement*** caractérisés par un *intervalle* I(P,Q) entre ces 2 évts dont la valeur ne dépend pas de l'observateur (intervalle invariant)

Signification opérationnelle : considérons des horloges et règles **identiques**

Battements/longueurs identiques quand elles sont juxtaposées/ suivent la même trajectoire

Considérons alors 2 observateurs Obs & Obs', chacun équipé de :

- une de ces horloges
- trois de ces règles (pour construire un système d'axes Oxyz)

➔ Pour tout observateur, P & Q sont chacun repéré par une date et 3 coordonnées spatiales

→ P(t,x,y,z) & Q(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)

L'intervalle est défini par une certaine fonction R de ces 8 coordonnées (ou différences)

→ I(P,Q) = R(t,x,y,z,dt,dx,dy,dz)   R définie **indépendemment de l'observateur**

➔ **le choix de la fonction R définit** (est censé définir) **les propriétés de l'esp-tps considéré**

Obs → P(t,x,y,z) & Q(t+dt,x+dx,…) $\quad I_{Obs}(P,Q) = R(t,x,y,z,dt,dx,dy,dz)$

Obs' → P(t',x',y',z') & Q(t'+dt',x'+dx',…) $\quad I_{Obs'}(P,Q) = R(t',x',y',z',dt',dx',dy',dz')$

$$\underbrace{I_{Obs}(P,Q) = I_{Obs'}(P,Q)}_{} \Rightarrow \boxed{R(t,x,\dots,dt,dx,\dots) = R(t',x',\dots,dt',dx',\dots)}$$

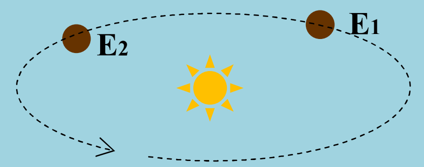
Valeur de l'intervalle : indépendente de l'observateur

Remarque :

Notons qu'une invariance telle que : $\quad R(t,x,\dots,dt,dx,\dots) = R(t',x',\dots,dt',dx',\dots)$

conduit génériquement à :

- (une sorte de) relativité du temps



- l'existence d'une quantité de type vitesse entrant dans la définition même de cet esp-tps

… la « forme précise » étant donnée par la fonction *R* choisie

… qui n'a aucune signification physique a priori ! (à ce niveau, nous ne faisons qu'une théorie de l'esp-tps, pas une théorie de la lumière !)

→ c'est simplement un moyen de « combiner » des quantités spatiales & temporelles !!!

Deux exemples d'espace-temps théoriques : Newton & Minkowski

<u>1a- Espace-temps de Newton</u> : l'**<u>intervalle invariant</u>** entre 2 évts voisins est l'intervalle de temps entre ces 2 évts

$$R(t, x, \ldots, dt, dx, \ldots) = dt \quad \rightarrow \quad dt' = dt$$

- en ce sens, le temps est absolu
- la notion de simultanéité a un sens sans avoir à faire référence à l'observateur effectuant les mesures

➔ mesures d'espace & de temps découplées !

La définition de l'esp-tps de Newton requiert des précisions sur les propriétés de l'espace au-delà de la définition de l'intervalle invariant

<u>Newton</u> (les « principia », 1687) :

- le **temps** est **uniforme**
- l'**espace** est **euclidien** $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

➔ **homogénéité** & **isotropie**

sens experimental

propriétés locales & globales

noter que ces propriétés **n'exigent aucun lien** entre dt et dt', tel que dt'=dt ou toute autre relation entre les mesures d'intervalles de temps réalisées par differents observateurs

Corrolaire : il n'y a donc pas de « relativité du temps » (non triviale) dans l'esp-tps de Newton $\leftarrow$ ce fait (plutôt exceptionnel) est dû au fait qu'aucun terme spatial n'apparait dans l'expression de l'invariant (juste dt …)

$\rightarrow$ **dans l'esp-tps de Newton**, la séparation spatiale entre 2 évts dépend de l'observateur, mais **pas la séparation temporelle**

1b- Espace-temps de Minkowski : l'**intervalle invariant** entre 2 évts voisins est

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

nouvelle notation (à la place de R)

V = **vitesse de Minkowski**
(sera ainsi nommée dans ce cours …)

Différence essentielle avec esp-tps de Newton : les propriétés des sections spatiales sont incluses dans l'expression de l'intervalle invariant :

sections spatiales de l'esp-tps : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Les sections spatiales relèvent donc de la géometrie euclidienne

Il est notable que les propriétés des esp-tps de Minkowski et de Newton sont essentiellement identiques (temps uniforme, espace euclidien $\rightarrow$ homogénéité & isotropie) à part le fait que les mesures de temps dépendent de l'observateur !!!

Il est important de souligner (encore !) que *V* **n'a aucun sens physique a priori**. Jusque là, nous ne faisons qu'une théorie de l'espace-temps, **mais PAS** une théorie de la lumière, de l'électromagnétisme, ou de quoique ce soit d'autre.

Cependant, **la vitesse de Minkowski possède une propriété remarquable :**

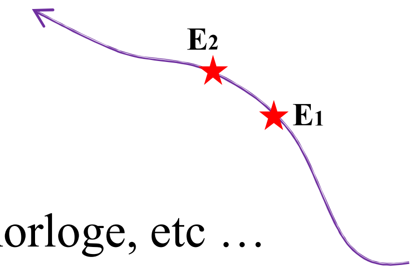
Considérons un « objet » X (particule), observé par plusieurs observateurs O, O',O'', …, chacun d'eux mesurant la vitesse de X.

Génériquement, les mesures de O, O',O'', … conduisent à des vitesses qui diffèrent en module et en direction

MAIS : si la vitesse mesurée par un des observateurs, disons (O), est de module *V*, alors

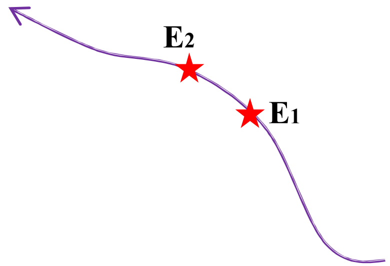
les vitesses mesurées par TOUS LES OBSERVATEURS ont pour MODULE *V* !!!

Dem : considérons 2 évts proches E_1 & E_2, localisés sur l'orbite de la particule, observés par deux observateurs O et O'.



obs O : $E_1(t,x,\ldots)$ & $E_2(t+dt,x+dx,\ldots)$, càd E_1 a lieu à la date t sur son horloge, etc …
obs O' : $E_1(t',x',\ldots)$ & $E_2(t'+dt',x'+dx',\ldots)$, càd …

La vitesse mesurée par O ayant pour module V, l'intervalle invariant qu'il calcule entre les 2 évts vaut zéro :



$$\left(ds^2\right)_{\text{obs O}} = -V^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(-V^2 + \underbrace{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}_{\text{...le carré de la vitesse... } = V^2}\right) dt^2 = 0$$

Donc, de l'invariance de l'intervalle $\left(ds^2\right)_{\text{obs O'}} = \left(ds^2\right)_{\text{obs O}} = 0$

résulte que les laps de temps et distance mesurés par O' doivent satisfaire $-V^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}{dt'} = V$

… qui signifie que le module de la vitesse mesurée par O' est également V.

Rem 1 : ceci **ne dit rien** sur **la nature de « l'objet physique »** dont la vitesse (le module) est V !

Rem 2 : le **module** seulement est concerné. Rien n'assure l'égalité de dx'/dt' (resp dy'/dt', …) et de dx/dt (resp dy/dt, …) dans le cas général …
… et ces **composantes diffèrent** en général !

phénomène d'aberration

Une remarque à garder à l'esprit, en lien avec la suite …

L'intervalle invariant : $$ds^2 = -V^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

peut être réécrit :

$$ds^2 = \sum_{a,b} g_{ab}\left(x^c\right) dx^a dx^b \qquad \text{notation} \qquad \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv \left(Vt, x, y, z\right)$$

$$= g_{ab}\, dx^a dx^b$$

Minkowski

$$\left(g_{ab}\right) = \left(m_{ab}\right) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on omet le symbole de sommation
sur les indices répétés
(convention d'Einstein)

$g_{ab}\left(x^c\right) = \underbrace{\text{tenseur métrique}}$ (voir plus loin …)

définit une **geométrie** (riemannienne)

Rem : on pourrait remarquer que l'invariant de Newton peut (aussi) être écrit sous une forme analogue :

$$ds^2 = dt^2 = \left(\sum_{a,b}\right) g_{ab}\, dx^a dx^b$$

Newton

… mais avec :

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MAIS **un tel tenseur g_{ab} NE DEFINIT PAS une geométrie riemannienne**
(← la matrice correspondante n'est pas inversible, voir plus loin)

Rem 1: affirmer que « l'espace-temps de Newton est plat » est un **non-sens** …
(l'espace de Newton est plat, mais **l'esp-tps de Newton n'a aucune geométrie!!!**)

Rem 2: cependant, l'esp-tps de Newton a des **propriétés** (aptitude à faire des prévisions physiques) ***aussi précises*** que celles de l'esp-tps de Minkowski …

La **grande leçon de la Relativité Restreinte** , et l'une des, sinon **LA**, plus grande découverte de toute la physique :

L'espace-temps est assorti d'une geométrie !!!

2 – Le principe de relativité, la théorie de Maxwell & l'expérience de Michelson-Morley

Le **principe de relativité** (un principe seulement, pas une nécessité logique pour assurer la cohérence d'une théorie physique !) :
une **expérience de physique** ne peut mettre en évidence un **« mouvement absolu »**

tout type d'expérience physique ?
càd : les lois de la physique sont **toutes** concernées ?

qu'est-ce qu'un « mvt absolu »?

En « termes de physique newtonienne » (jusqu'à la fin du XIXème) :

un « mvt absolu » est un mvt par rapport à un réf galiléen particulier, c'est-à-dire qu'il distingue un réf galiléen parmi les autres (les réf galiléens étant un ensemble de réf, en mvt rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres).

→ une **loi physique** satisfait le **principe de relativité** si elle est valide dans **tous les réf galiléens** (dans le cadre des esp-tps de Newton ou de Minkowski)

La loi de la dynamique de Newton, et la théorie de la gravitation de Newton, satisfont le principe de relativité, ces théories étant formulées **dans l'esp-tps de Newton**.

→ **qu'en est-il de la théorie électromagnétique/optique ?**

La théorie électromagnétique de Maxwell

$$\left.\begin{array}{l} rot\,\vec{E} \equiv \vec{\partial} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ div\,\vec{B} \equiv \vec{\partial}.\vec{B} = 0 \end{array}\right\}$$

propriétés des champs indépendantes des sources
→ E & B dérivent de potentiels

$$\left.\begin{array}{l} div\,\vec{E} \equiv \vec{\partial}.\vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ rot\,\vec{B} \equiv \vec{\partial} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}\right) \end{array}\right\}$$

couplage champs-sources

→ les solutions dans le vide satisfont l'éq de propagation $\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \partial_t\right)\left(\vec{E}, \vec{B}\right) = 0$

→ solutions se propageant à une vitesse de module $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Signification ? (1)

… dans tout réf où les éqs de Maxwell sont valides (telles qu'écrites ci-dessus), les ondes électromagnétiques (interprétation Maxwellienne de la lumière) traversent l'espace à une vitesse de module déterminé par les constantes électromagnétiques

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3.10^5 km / s$$

et ce module ne dépend (donc) pas de la direction de propagation
→ la propagation de la lumière **est isotrope** (dans tout réf où les éq de Maxwell sont valides)

Signification ? (2)

Il est aisé de vérifier (composition des vitesses) que, dans le cadre de **l'esp-tps de Newton**, si un ensemble d'objets satisfait une telle condition d'isotropie dans un réf galiléen, il ne peut satisfaire cette condition dans tout autre réf gliléen en mvt par rapport à ce premier réf.

→ si éqs Maxwell valides dans un réf galiléen, elles ne peuvent pas l'être dans les autres !

→ la théorie de Maxwell **ne peut pas satisfaire le ppe de relativité !** (esp-tps de **Newton**)

→ une exp electromagnetique doit permettre de **révéler un mvt absolu !**

… donc d'optique …

Les lois de l'électromagnétisme définissent donc un réf privilégié parmi les réf galiléens mécaniquement équivalents. C'est dans ce **réf galiléen privilégié**, et seulement dans celui-ci, que la théorie de Maxwell (et la théorie optique induite) est valide.

… nommé « éther »

Remarquons que c'est **seulement dans cet éther** que parler de « la vitesse de la lumière » **a un sens** …

Le but de l'expérience de Michelson-Morley (1881):

→ **détecter la fluctuation (annuelle) de la vitesse de la lumière, venant d'un astre donné, mesurée depuis la Terre, due à son mouvement orbital autour du Soleil**

(en réalisant une expérience interférométrique de Michelson utilisant la lumière venant d'une étoile, sur une année)

Verdict de l’expérience de Michelson-Morley (1881) :

➔ **aucune fluctuation observée !!!**

Ce que ce résultat (absence de détection) signifie :
quelque soit le mvt de la Terre, donc **quelque soit le réf galiléen** (instantané) dans lequel l’expérience est réalisée, **la vitesse de la lumière EST isotrope !!!**

➔ conclusion manifestement incompatible avec le cadre spatio-temporel de Newton !!!

D’un autre côté …

… la conclusion est compatible avec le cadre spatio-temporel de Minkowski
si la vitesse de la lumière c est identifiée à la vitesse de Minkowski *V*

Donc, dans le cadre spatio-temporel minkowskien, il est possible de comprendre le résultat de Michelson-Morley, et cette interprétation implique une relation entre la vitesse de Minkowski (esp-tps) et les constantes é-m, qui s’écrit :

$$c\left(=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)=V$$

Acceptant (postulant !) cela, on conclu que
la **théorie de Maxwell satisfait le principe de relativité** …
… et il est légitime de parler de **LA vitesse de la lumière !!!** (sans autre précision)

3 – un peu plus sur l'espace-temps de Minkowski …

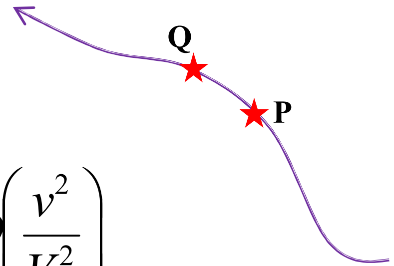
Ayant postulé, dans le cadre minkowskien, la théorie de Maxwell, les constantes électromagnétiques étant reliées à la vitesse de Minkowski par

$$\varepsilon_0 \mu_0 V^2 = 1$$

il est légitime d'écrire c à la place de V. **Cependant, nous allons conserver la notation V tout au long de ce cours, quand nous ferons référence à la vitesse de Minkowski**.

L'invariant de Minkowski se réduit à celui de Newton « pour des vitesses <<V »

Lorsqu'on ne considère que des mvts à « faibles vitesses » (càd <<V), l'invariant de Minkowski, le long de la trajectoire associée à un tel mvt, s'écrit



$$ds^2 = -V^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -V^2dt^2 + v^2dt^2 = -\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)}_{= 1 + O\left(\frac{v^2}{V^2}\right)} V^2dt^2$$

où v est la vitesse associée à ce mvt. Par conséquent, dt est invariant dans la mesure ou les termes de second ordre en v/V sont négligés. L'invariance du ds² minkowskien se réduit donc, en ce sens, à celle de dt (Newton).

Changements de coordonnées

L'intervalle invariant ds² = -V^2dt²+dx²+… caracterise l'esp-tps de Minkowski, mais aussi, en un sens, les coordonnées spatio-temporelles (t,x,y,z) servant à localiser les évts. Cependant, un évt peut aussi bien être représenté par 4 autres nombres, reliés à (t,x,y,z) par 4 relations données, interprétables en termes de changement de coordonnées. Considérons un changement de coordonnées général :

$$t=T(t',x',y',z')\ ;\ x=X(t',x',y',z')\ ;\ y=Y(t',x',y',z')\ ;\ z=Z(t',x',y',z')$$

où T, X, Y & Z sont 4 fonctions de 4 variables.

L'invariant prend alors la forme

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -V^2\left(\frac{\partial T}{\partial t'}dt'+\frac{\partial T}{\partial x'}dx'+\dots\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial t'}dt'+\frac{\partial X}{\partial x'}dx'+\dots\right)^2\\
&\quad+\left(\frac{\partial Y}{\partial t'}dt'+\frac{\partial Y}{\partial x'}dx'+\dots\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial t'}dt'+\frac{\partial Z}{\partial x'}dx'+\dots\right)^2\\
&=\left[-V^2\left(\frac{\partial T}{\partial t'}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial t'}\right)^2+\dots\right]dt'^2+\left[-V^2\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial x'}\right)^2+\dots\right]dx'^2+\dots\\
&\quad+2\left[-V^2\frac{\partial T}{\partial t'}\frac{\partial T}{\partial x'}+\frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial X}{\partial x'}+\dots\right]dt'dx'+\dots
\end{aligned}$$

Par exemple

$$\begin{cases} t=t' \\ x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

$$ds^2=-V^2dt'^2+dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta.d\varphi^2\right)$$

→ coordonnées sphériques (transformation purement spatiale)

qui représente l'esp-tps de Minkowski tout aussi légitimement que la forme « cartésienne » usuelle ds² = -V^2dt²+dx²+dy²+dz² .

Question : parmi toutes ces transformations, en est-il qui laissent la forme ds² usuelle inchangée, càd telles que ds² = -V^2dt'²+dx'²+dy'²+dz'² ?

Réponse : oui, ce sont les **transformations de** (générales) **Lorentz**.

<u>Transformations speciales de lorentz</u> : parmi les transformations générales de Lorentz, ce sont celles qui laissent 2 coordonnées spatiales « inchangées ». Elles dépendent d'un seul paramètre *u* :

$$Vt' = \gamma\left(Vt - \frac{u}{V}x\right) \;\; ; \;\; x' = \gamma\left(x - \frac{u}{V}Vt\right) \; ; \; y' = y \; ; \; z' = z \quad \text{où} \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{V^2}\right)^{-1/2} \quad \text{(facteur de Lorentz)}$$

(t,x,y,z) définit un référentiel F, (t',x',y',z') un réf F'. Si dans le premier l'intervalle invariant a sa forme « usuelle », il en va de même dans le 2ème, car les transfos de Lorentz assurent

$$-V^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -V^2dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

Terminologie : tout système de coordonnées dans lequel l'invariant prend sa forme usuelle est dit (pseudo)cartesien, et définit un référentiel galiléen. t est le temps coordonnée de ce réf galiléen. (x,y,z) sont les coordonnées spatiales de ce réf galiléen. (Les transfos de Lorentz (spéciales ou non) font passer d'un réf gal à un autre réf gal.)

Si une particule est au repos dans F' (càd si x',y' & z' sont constants), alors

$$dx' = \gamma\left(dx - \frac{u}{V}Vdt\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u$$

de telle sorte que le paramètre *u* peut être interprété comme étant « la vitesse de F' par rapport à F ». Les transfos de Lorentz n'ont de sens que si $u < V$.

Quelques formes non cartsiennes de la métrique de Minkowski

La transformation (y & z inchangés)

$$t = \tau \cosh \psi \;\; ; \;\; x = V\tau \sinh \psi \quad \rightarrow \quad ds^2 = -V^2 d\tau^2 + V^2\tau^2 d\psi^2 + dy^2 + dz^2$$

… utile pour décrire certains mvts accélérés

Considérons Minkowski en coord sphériques $\quad ds^2 = -V^2dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2\right)$

puis la transformation (angles inchangés)

$$Vt = \tau \cosh \chi \;\; ; \;\; r = \tau \sinh \chi \quad \rightarrow \quad ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2\left[d\chi^2 + \sinh^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2\right)\right]$$

… → Minkowski sous une $\underbrace{\text{« forme Robertson-Walker »}}$

métrique parfois appelée « Univers de Milne »
(évoque la métrique d'un univers en expansion)

La transformation (y & z inchangés)

$$2Vt = u + v \;\; ; \;\; 2x = u - v \quad \rightarrow \quad ds^2 = -dudv + dy^2 + dz^2$$

… parfois utile dans certains problèmes relatifs à la propagation de la lumière

Attention : la métrique de Minkowski ne peut pas être mise sous n'importe quelle forme choisie a priori. Par exemple, il n'y a pas de transfo des coord qui mettrait Minkowski sous la forme

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2\left[d\chi^2 + \chi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2\right)\right]$$

Licence3 : chapitre 2
La Relativité Restreinte en (très) bref

Bertrand Chauvineau

Université Côte d'Azur

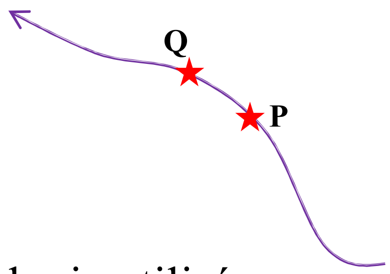
Observatoire de la Côte d'Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

1 – Temps propre de Minkowski

Considérons le mvt d'une « particule » dans Minkowski. Dans un réf galiléen, on représente souvent son mvt par 3 fonctions décrivant l'évolution des coord spatiales en fonction de la coord temporelle



$$(x(t), y(t), z(t))$$

Les dérivées de ces fonction définissent la « vitesse galiléenne » (terminologie utilisée dans ce cours) de la particule, traditionnellement écrite

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

La présence d'une flèche sur *v* peut donner à cet ensemble de 3 nombres l'<u>apparence</u> d'un vecteur (abusivement, un vecteur de l'espace-temps ayant nécessairement 4 composantes –voir plus loin–).

Considérons 2 évts voisins P & Q appartenant à l'orbite de la particule. Par définition, le temps propre de Minkowski (en bref, temps propre) entre ces 2 évts est l'intervalle de temps coordonnée (séparant ces mêmes évts) dans le réf galiléen F* dans lequel la particule est (instantanément) au repos. F* est appelé réf galiléen propre (instantané) de la particule.

La valeur de l'intervalle entre P & Q peut être calculée de 2 façons (dans F & dans F*) :

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{= v^2 dt^2} = -\left(V^2 - v^2\right) dt^2$$

$$= -V^2 \left(dt^*\right)^2$$

au repos dans F* → $dx^* = dy^* = dz^* = 0$

$$\boxed{dt^* = \sqrt{1 - (v/V)^2}\, dt}$$

Remarquons que la possibilité de définir le temps propre attaché à cette particule requiert la condition …

$$ds^2 = -V^2\left(dt^*\right)^2 \leq 0 \;\rightarrow\; v^2 \leq V^2$$

… et même, plus précisément : $dt^* \neq 0 \;\rightarrow\; v^2 < V^2$

Remarquons aussi que : $v^2 = V^2 \;\rightarrow\; dt^* = 0$

Il n'y a pas de temps propre attaché à une particule se déplaçant à la vitesse de Minkowski.

Remarquons que l'intervalle de temps propre s'écrit aussi, en utilisant le

« tenseur métrique de Minkowski » : $V dt^* = \sqrt{-ds^2} \;\rightarrow\; \boxed{dt^* = \frac{1}{V}\sqrt{-m_{ab}dx^a dx^b}}$

Petite remarque sur la terminologie (pour que ce soit mentionné quelque part …).
Dans la définition, nous avons choisi de préciser « temps propre *de Minkowski* » pour souligner qu'il s'agit là d'une définition « géométrique » de la notion de « temps » propre, et que cette notion ne mesure pas nécessairement (a priori) un « temps physique » qui serait « attaché à la particule ».
Cette subtilité sera sans effet dans le cadre de ce cours (relativités restreinte & générale), mais prend tout son sens dans le cadre de certaines « théories alternatives » où la matière peut être couplée à d'autres champs décrivant le champ gravitationnel que la métrique (théories tenseur-scalaires dans certaines représentations, par exemple).
Dans le cadre de ce cours, ce temps propre (de Minkowski) correspondra donc bien au temps physique mesuré par un observateur « attaché à la particule ».

2 – Vitesse & 4-vecteur vitesse

Dans tout système de coordonnées, la différence des coord de 2 évts voisins P & Q définit le **vecteur déplacement** entre ces 2 évts (remarquons que cet objet a 4 composantes). En coord cartésiennes, les composantes de ce vecteur sont (Vdt,dx,dy,dz). Remarquons qu'il est usuel (mais pas logiquement nécessaire) d'inclure V dans la définition de la composante temporelle.

Le long d'un mvt donné, les composantes du **4-vecteur vitesse** (voir plus loin pour justifier l'appellation « vecteur »), ou **4-vitesse** pour faire bref, sont les variations de coord par unité de temps **propre**. En coord cartésiennes, ce 4-vecteur s'écrit

$$(u^0,u^1,u^2,u^3)=\left(V\frac{dt}{dt^*},\frac{dx}{dt^*},\frac{dy}{dt^*},\frac{dz}{dt^*}\right)=\gamma\left(V,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=\gamma(V,\vec{v})\quad avec\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}}$$

Remarquons que la norme (définition à l'aide de la métrique –voir plus loin le cas général –) de la 4-vitesse est (1) constante et (2) a la **même valeur** pour tous les mvts imaginables

$$u^2\equiv m_{ab}u^a u^b=-\left(u^0\right)^2+\left(u^1\right)^2+\left(u^2\right)^2+\left(u^3\right)^2=\gamma^2\left(-V^2+v^2\right)=-V^2$$

Ne pas se laisser abuser par les notations, parfois malheureuses, mais usuelles …

Notation pour la norme (ne préjuge pas du signe !)

Notation indicielle pour les composantes

Notation pour le carré algébrique (positif !)

Digression : profitons en pour « démystifier » E = mc² …

Soit une particule (en mvt quelconque). La constance de la norme de sa 4-vitesse se traduit de la façon suivante :

$$\gamma^2V^2-(\gamma\vec v)^2=V^2\longrightarrow 2\gamma V^2d\gamma-2\gamma\vec v d(\gamma\vec v)=0\longrightarrow d(\gamma V^2)=\vec v d(\gamma\vec v)=d\vec r\frac{d}{dt}(\gamma\vec v)$$

Si on attache à cette particule une masse (concept dynamique, on ne développera pas ici, on a juste besoin de savoir que ce nombre est un des nombres caractérisant la particule, indépendamment de son mvt), cette relation s'écrit :

En dynamique relativiste :

identifier à …

$$\underbrace{d(\gamma m V^2)}_{\text{… l'énergie de la particule}} = d\vec r.\frac{d}{dt}\underbrace{(\gamma m\vec v)}_{\text{… l'impulsion de la particule}}$$

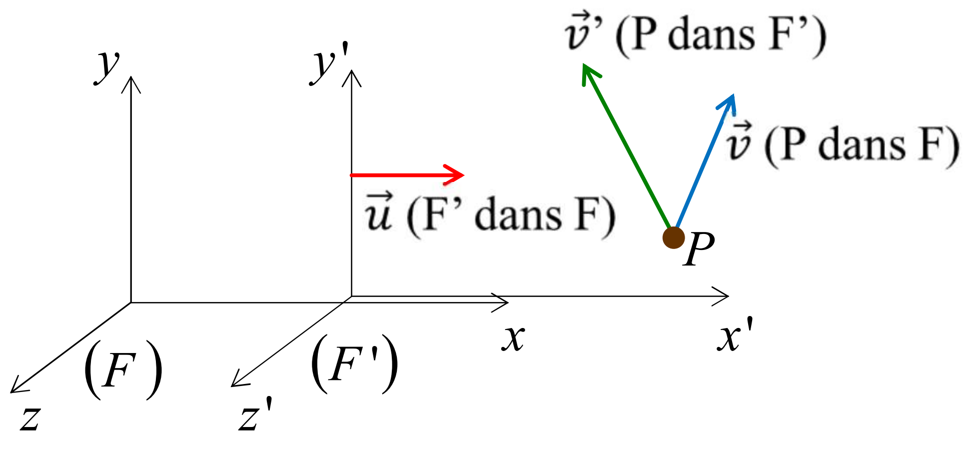
… la **force** agissant sur la particule

… est donc le **travail de la force** sur le déplacement élémentaire considéré

$$E=\gamma m V^2$$

En dynamique relativiste, $(\gamma mV,\gamma m\vec v)=\left(\frac{E}{V},\gamma m\vec v\right)=m(u^0,u^1,u^2,u^3)$ définit le **4-vecteur energie-impulsion** (c'est un 4-vecteur au même titre que la 4-vitesse) de la particule (massive). Son module (m²*V*²) mesure la masse (ou énergie au repos) de la particule.

Composition des vitesses



Considérons 2 réf galiléens F & F' reliés par une transfo spéciale de Lorentz.
Soit une particule P de vitesses :

- $\vec{v}$ par rapport à F
- $\vec{v'}$ par rapport à F'

Comment obtenir $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$ en fonction de $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ & u ?

Composantes de la vitesse mesurées dans F : $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, $v_z = \dfrac{dz}{dt}$

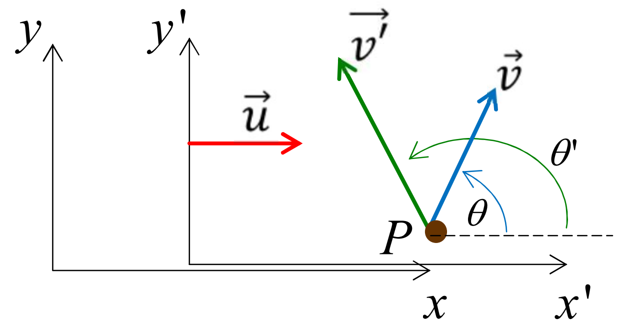
Composantes de la vitesse mesurées dans F' : $v'_{x'} = \dfrac{dx'}{dt'}$, $v'_{y'} = \dfrac{dy'}{dt'}$, $v'_{z'} = \dfrac{dz'}{dt'}$

Considérant 2 évts voisins sur l'orbite de la particule, on obtient, à partir de la transfo spéciale de Lorentz :

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{u}{V^2}dx\right) \quad ; \quad dx' = \gamma(dx - u\,dt) \quad ; \quad dy' = dy \quad ; \quad dz' = dz$$

Il vient donc :

$$v'_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{V^2} v_x} \quad , \quad v'_{y'} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{V^2} v_x\right)} \quad , \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{V^2} v_x\right)}$$



Si l'orientation des axes des réf est telle que $v_z = 0$, on peut relier les modules & directions des vitesses galiléennes définis par des observateurs au repos dans F & F' :

$$v_x = v\cos\theta \quad , \quad v_y = v\sin\theta \quad , \quad v'_{x'} = v'\cos\theta' \quad , \quad v'_{y'} = v'\sin\theta' \qquad (\, v_z = v'_{z'} = 0\,)$$

$$v'\cos\theta' = \frac{v\cos\theta - u}{1 - \frac{u}{V^2} v\cos\theta} \quad , \quad v'\sin\theta' = \frac{v\sin\theta}{\gamma\left(1 - \frac{u}{V^2} v\cos\theta\right)} \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan\theta' = \dfrac{v\sin\theta}{v\cos\theta - u}\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{V^2}} \\ v'^2 = \cdots \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une particule se déplaçant à la vitesse de Minkowski
(vitesse de la lumière ← théorie de Maxwell)

$$v_x^{\,2} + v_y^{\,2} = V^2 \quad \to \quad v'^{\,2}_{x'} + v'^{\,2}_{y'} = V^2 \quad \text{(exercice !)} \quad \to \quad \text{le vecteur a changé, mais pas son module}$$

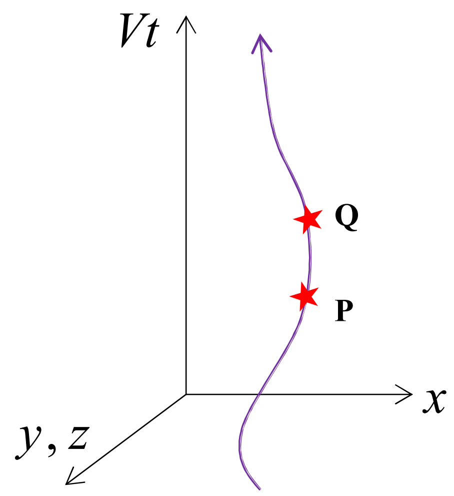
$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} \quad , \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)} \quad \to \quad \boxed{\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta}\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{u}{V}}$$

Formule de l'« aberration de la lumière »

3 – Diagrammes d'espace-temps

But : représenter les différents évts (qui, par exemple, peuvent se produire sur l'orbite d'une particule donnée) dans un diagramme faisant apparaitre les coord spatiales & temporelle

Convention: représenter t, ou (mieux) Vt, sur l'axe vertical, et les coord spatiales « perpendiculairement »

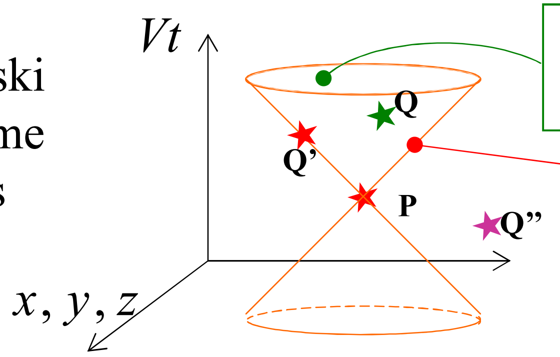


Une orbite est dite **matérialisable** ssi un **temps propre** peut être défini le long de celle-ci. Ceci exige que la vitesse galiléenne soit de module $< V^2$ en chacun de ses points.

→ Soit un évt P sur l'orbite. Les autres évts appartenant à une telle orbite passant par P doivent être situés à l'intérieur du **cône de Minkowski** attaché à P, défini ci-après.

Le **cône de Minkowski** attaché à un évt P est constitué de toutes les droites passant par P, et le long desquelles l'intervalle de Minkowski est nul : $ds^2 = 0$.

Cône de Minkowski dans un diagramme d'espace-temps



Intérieur du cône de Minkowski (passé & futur de P) $ds_{PQ}^{\;2} < 0$

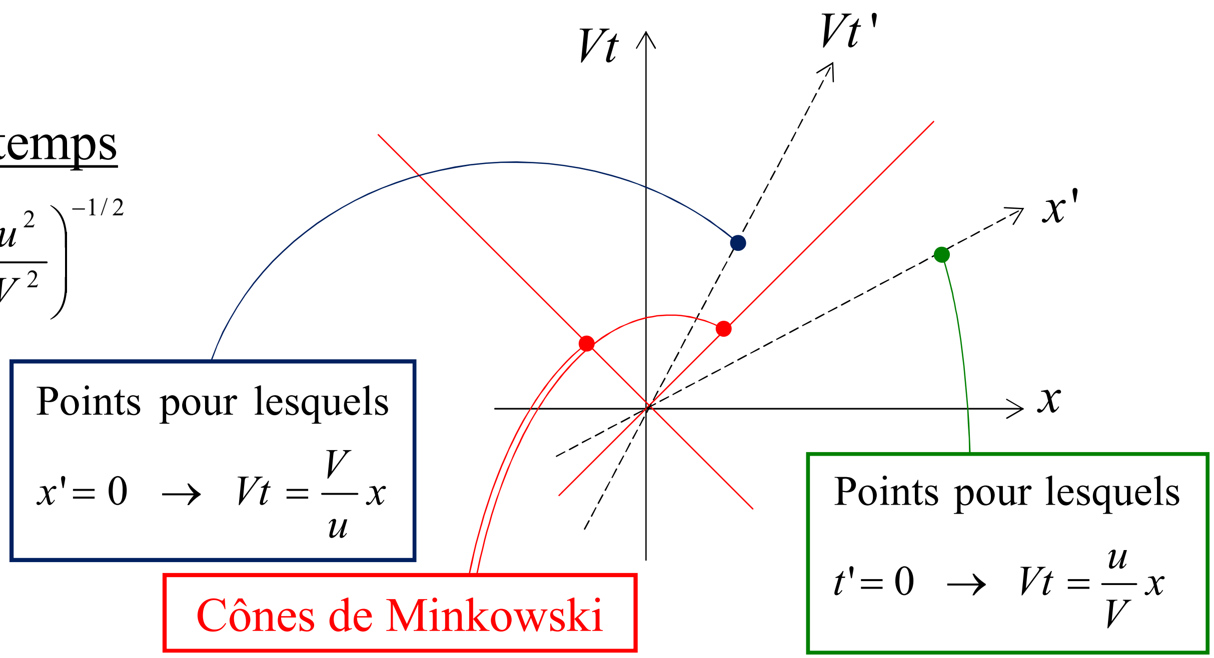
Cône de Minkowski $ds_{PQ'}^{\;2} = 0$

Extérieur du cône de Minkowski $ds_{PQ''}^{\;2} > 0$

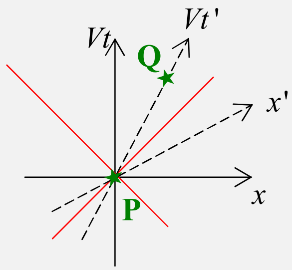
Transfo spéciale de Lorentz versus diagrammes d'espace-temps

$$Vt' = \gamma\left(Vt - \frac{u}{V}x\right) \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{V^2}\right)^{-1/2}$$

$$x' = \gamma\left(x - \frac{u}{V}Vt\right)$$

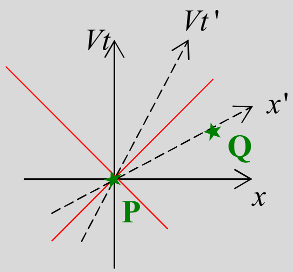


Si $ds^2_{PQ} < 0$ il existe un réf galilean dans lequel PQ n'a pas de comp spatiale → vecteur de type temps



P & Q sont ordonnés dans le temps (indépendemment de l'observateur)

Si $ds^2_{PQ} > 0$ il existe un réf galilean dans lequel PQ n'a pas de comp temporelle → vecteur de type espace



P & Q NE SONT PAS ordonnés dans le temps (Q peut se produire avant ou après P, ça dépend de l'observateur)

Si $ds^2_{PQ} = 0$ Q est sur le cône de Minkowski → vecteur isotrope

Causalité

Le **principe** de **causalité** demande que si un évt P est la cause d'un évt Q, alors

>>>> **aucun « observateur physique » ne peut voir Q se produire avant P** <<<<

(un « observateur physique » étant un observateur parcourant une orbite matérialisable, condition nécessaire & suffisante pour que la notion de temps propre ait un sens pour lui !)

→ P & Q ne peuvent pas définir un vecteur de type espace

Donc, si l'évt Q est une conséquence de l'évt P,
Q doit se trouver à l'intérieur du, ou sur le, cône de Minkowski attaché à P.

Remarque 1 : ce principe de causalité peut sembler très **naturel** (en un certain sens).
Cependant, sa réalisation **N'EST PAS** logiquement **nécessaire**
à la **cohérence** de la théorie physique considérée !!!

Remarque 2 : dans le contexte des **théories relativistes de la gravitation**
(dont la Relativité Générale), l'application de ce principe
(càd l'ajouter –arbitrairement ! – aux postulats de la théorie)
permet d'**éliminer certaines solutions**, considérées alors
comme étant « physiquement non acceptables »

4 – Points divers

1- « dilatation du temps », « contraction des longueurs », … : expressions malheureuses !!!

exercises!

→ à l'origine d'un grand nombre de confusions, (pseudo-)paradoxes, …

→ « contraction des longueurs » : en un sens, une autre façon d'interpréter certains aspects de la relativité du temps

2- « masse relativiste » : idem !!!

→ vient d'une façon « mathématiquement non naturelle » de regrouper des termes apparaissant dans un produit

$$\underbrace{\left(\frac{E}{V},\vec{p}\right) = (\gamma m V,\gamma m\vec{v})} = \underbrace{m} \times \underbrace{(\gamma V,\gamma\vec{v})} = \underbrace{\gamma m} \times \underbrace{(V,\vec{v})}$$

4-impulsion, ou énergie-impulsion, de la particule

masse **(scalaire)** de la particule

4-vitesse **(vecteur)** de la particule

masse relativiste **(PAS un scalaire)** de la particule

?????????? **(PAS un vecteur)** de la particule

On aime ! (scalaires, vecteurs … ont un « statut covariant » clair)

On peut … c'est pas faux … mais **on n'aime pas !** (termes sans « statut covariant » clair)

3- Simultanéité :

Relativité du temps → relativité de la simultanéité

$$Vt' = \gamma\left(Vt - \frac{u}{V}x\right) \;\;\&\;\; dt = 0 \;\;\rightarrow\;\; Vdt' = -\gamma\frac{u}{V}dx \neq 0$$

→ dire que 2 évts se produisent simultanément sans référence à un observateur particulier n'a **aucun sens !**

4- La **technologie GPS** :

(peut-on imaginer une application des idées relativistes sur l'espace-temps plus proche de nos préoccupations quotidiennes ?)

Cette technologie ne serait **même pas concevable dans un cadre non relativiste**. Elle requiert, en effet :

- l'existence « dans la nature » d'une classe de vitesses dont le module ne dépend ni (du mvt) de l'émetteur, ni (du mvt) du récepteur (existe dans un esp-tps de type Minkowski) ;
- que le media utilisé (lumière) se propage précisément à cette vitesse ($c = V$!) ;
- assurer & maintenir la géolocalisation au niveau du mètre exige la prise en compte explicite des effets relativistes dans les calculs. En effet :

$v_{sat} \sim 4$ km/s $\longrightarrow (v/c)^2 \approx 2.10^{-10} \longrightarrow$ Désynchronisation : taux ~ 15 µs/jour $\xrightarrow{\text{multiplier par } c\,!}$ Dérive en positionnement ~ 4 **km/jour** !

(Les effets gravitationnels sur le temps sont du même ordre.)

Licence3 : chapitre 3

Espace-temps, inertie, gravitation

Bertrand Chauvineau

Université Côte d'Azur

Observatoire de la Côte d'Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

0 – Préambule : équations de Lagrange

Considérons :

- 2 nombres fixés a & b ;
- une fonction $y(x)$ prenant les valeurs A & B en $x=a$ & $x=b$ respectivement ; [→ contrainte ©]
- une fonctionnelle, qu'on nommera lagrangien, dépendant de la fonction y(x) et de sa dérivée première.

Considérons alors l'intégrale : $$S[y] = \int_a^b L(y(x), y'(x))\, dx$$

Attention : la notation « prime » (') signifie ici la dérivation par rapport à la variable en argument, et pas l'appartenance à un autre jeu de variable (signification qui sera fréquente plus tard dans le cours …)

Le résultat dépend manifestement du choix de la fonction y(x).

→ question : parmi toutes les fonctions **telles que** ***y*(*a*)=*A*** **&** ***y*(*b*)=*B***,
comment déterminer celles pour lesquelles S atteint un extremum (local) ?

Soit $y(x)$ une fonction satisfaisant ©. Toute autre fonction satisfaisant © peut s'écrire $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ où $\eta(x)$ est une fonction telle que $\eta(a)= \eta(b)=0$, et ε un nombre quantifiant l'écart à y.

La condition d'extrema local pour S s'écrit :

$$\forall\, \eta(x) \qquad S[y+\varepsilon\eta] - S[y] = \underbrace{o(\varepsilon)} \qquad \left(\text{avec} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = 0\right)$$

→ = 0 à l'ordre linéaire en ε

$$S[y+\varepsilon\eta]=\int_a^b L(y+\varepsilon\eta\,,y'+\varepsilon\eta')\,dx=\int_a^b\left[L(y,y')+\varepsilon\eta\frac{\partial L}{\partial y}+\varepsilon\eta'\frac{\partial L}{\partial y'}\right]dx$$

$$S[y+\varepsilon\eta]-S[y]=\varepsilon\int_a^b \eta\frac{\partial L}{\partial y}dx+\varepsilon\underbrace{\int_a^b \eta'\frac{\partial L}{\partial y'}dx}_{\text{Intégrer par parties}}=\varepsilon\int_a^b \eta\frac{\partial L}{\partial y}dx+\varepsilon\underbrace{\left[\eta\frac{\partial L}{\partial y'}\right]_a^b}_{=0\text{ car }\eta(a)=\eta(b)=0}-\varepsilon\int_a^b \eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)dx$$

$$S[y+\varepsilon\eta]-S[y]=\varepsilon\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right]dx$$

… la partie linéaire en ε doit être = 0 **pour tout η**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=\frac{\partial L}{\partial y}$$ **Équation de Lagrange**

L'équation de Lagrange est une équation différentielle sur y (le lagrangien ne dépendant que de y et de sa dérivée première y').

Parmi les solutions, celles passant effectivement par les points $(x,y) = (a,A)$ & (b,B) sont obtenues en déterminant les constantes d'intégration apparaissant dans la solution générale.

Deux applications : (1) plus court chemin (geodésique) dans le plan euclidien

Dans le plan euclidien, considérons 2 points $(x,y) = (a,A)$ & (b,B), et les courbes les reliant.

Question : parmi ces courbes, laquelle réalise le chemin le plus court (en termes de distance euclidienne usuelle) ?

En utilisant des coord cartésiennes, la distance s'écrit

$$D = \int_{(a,A)}^{(b,B)} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_a^b L(y,y')dx \qquad \text{avec} \qquad L(y,y') = \sqrt{1+y'^2}$$

L'équation de Lagrange s'écrit : $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{\partial L}{\partial y'} = cst \;\rightarrow\; y' = \alpha \;\rightarrow\; y = \alpha x + \beta$

→ ces courbes sont des segments de droites (… scoop !!!).

Les constantes d'intégration (α,β) s'obtiennent aisément par $\alpha a + \beta = A$ & $\alpha b + \beta = B$.

Deux applications : (2) loi du mvt de Newton dans le cas potentiel

Considérons un lagrangien dependant de 3 fonctions (indépendantes) de *t* ayant la forme (le « prime » dénote la dérivation par rapport à *t*) :

$$L(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{2} m \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + \Phi(x, y, z)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \rightarrow \quad mx'' = \partial_x \Phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad \rightarrow \quad my'' = \partial_y \Phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right) = \frac{\partial L}{\partial z} \quad \rightarrow \quad mz'' = \partial_z \Phi$$

On retrouve la loi newtonienne du mvt d'une particule de masse *m* dans un champ de force dérivant d'un potentiel Φ !

→ une « réinterprétation variationelle » de la dynamique newtonienne (qui va se révéler fructueuse, et très efficace pour « geométriser » la gravitation !)

1 – Espace-temps de Minkowski : orbites inertielles comme solutions d'un problème variationnel

Considérons une courbe de type temps dans l'esp-tps de Minkowski. Le long de cette courbe, le temps propre entre 2 évts P & Q (non voisins) s'écrit

$$\tau = \frac{1}{V}\int_P^Q \sqrt{V^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \int_{t_P}^{t_Q} dt \sqrt{1 - \frac{1}{V^2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)}$$

On vérifie aisément que les solutions x(t), y(t), z(t) des équations de Lagrange associées sont des fonctions affines. D'où le résultat :

Dans l'espace-temps de Minkowski, les mouvements inertiels extrémisent le temps propre (plus précisément, le temps propre est maximal pour les mvts inertiels).

Remarquons l'analogie avec ce qui se passe dans l'esp-tps de Newton : les mvts inertiels, non soumis à des forces, sont seulement déterminés par les propriétés de l'espace-temps.

- Esp-tps de **Newton** : ces propriétés sont les caractères euclidien de l'espace et uniforme du temps ;
- Esp-tps de **Minkowski** : ces propriétés sont finalement les mêmes (pour chaque observateur), mais sont plus élégamment remplacées (et résumées) par les propriétés **géométriques** de l'esp-tps (qui est plat –voir plus loin–).

Terminologie : les courbes qui extrémisent localement le $\sqrt{|ds^2|}$ d'un espace/esp-tps métrique sont généralement appelées **géodésiques** de l'espace/esp-tps considéré.

2 – Espace-temps de Newton versus masses

La gravitation selon **Newton** fonctionne en **3 étapes** (2 une fois définies les propriétés de l'esp-tps). Ceci est en partie dû au fait que la **gravitation**, dans l'approche newtonienne, n'est qu'un **cas particulier** de ce qui génère de la **dynamique** dans les systèmes.

Considérons un corps.

Si « **rien** » **n'agit** sur lui → **mvt inertiel**, qui reflète les propriétés de l'esp-tps
(mvt rectiligne & uniforme ← l'esp-tps de Newton)

→ si le mvt du corps n'est **pas inertiel**,
on **interprète** cela en disant que quelque chose, **nommé « force »**,
l'**écarte** de sa tendance à suivre un **mvt inertiel**

Étape 0 (fonctionne dans le cadre **newtonien** –minkowskien aussi bien !–) :
si la physique est décrite dans un esp-tps dont les propriétés sont **connues a priori**, on peut définir un **système de coord** (t,x,y,z) dont l'interprétation géométrique **est connue une fois pour toutes** (sans relation avec les objets contenus dans l'esp-tps, ni avec les forces agissant sur ces objets …)

→ dans l'esp-tps de Newton : **coord spatiales euclidiennes**

Mvt inertiel ⟷ $\vec{v}$ est un vecteur constant

Étape 1 (théorie dynamique) : donner une loi régissant comment $\vec{v}$ est changée par une force,

c'est-à-dire disant comment calculer $\frac{d\vec{v}}{dt}$ (accélération)

Puisque l'accélération est un objet à 3 composantes (vecteur de l'esp newtonien), proposons :

- de décrire la force par un (autre) vecteur (de l'esp newtonien) noté ,
  supposé (loi de la dynamique !) proportionnel à l'accélération

- qu'une quantité m_{in}, attachée au corps en mvt, appelée masse inertielle, quantifie
  à quel point cette force génère une accélération (par une règle de proportionnalité).

$$m_{in}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

Soulignons le **haut degré de généralité de la dynamique de Newton** : elle régit le mvt de tout corps (une fois donnée sa masse inertielle) **quelque soit le type de force** agissant sur lui !

→ la Relativité Générale sera beaucoup **moins ambitieuse** que la dynamique de Newton …
… étant seulement une théorie régissant les **mvts sous l'action gravitationnelle** !...

… Lorsque d'autres types d'interaction seront à considérer (en plus de la gravité),

on adaptera l'approche newtonienne !!!...

… pour décrire ces autres interactions, mais sous une forme adaptée aux propriétés de l'esp-tps de la relativité générale (présence de courbure).

Étape 2 (théorie de la force gravitationnelle) : on a besoin d'une loi permettant de calculer la force dans le cas de l'interaction gravitationnelle

On doit donc nécessairement définir :

- une quantité m_g, attachée à chaque corps, appelée masse gravitationnelle, quantifiant à quel point ce corps génère, et répond à, un champ gravitationnel

Supposons que la même « masse gravitationnelle » **assure ces 2 fonctions** …

- la **dépendance spatio-temporelle** de l'**interaction gravitationnelle** entre deux corps

Loi de Newton

- dépendance temporelle : effet **instantané** ← a un sens grâce au **caractère absolu des mesures de temps !**
- dépendance spatiale : force attractive & $1/r^2$

$$\vec{f}_{corps1\ sur\ corps2} = -G\, m_1^g m_2^g \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}$$

$$\boxed{\vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1}}$$

À propos … **pourquoi s'embête-t-on à trimbaler ce *G* partout ?**

→ pas du tout nécessaire pour que la théorie soit opérationnelle ! Mais … **c'est un moyen pour exprimer les masses grave & inertielle** dans la **même unité** (la **seule raison**!)

Quelques remarques (1) :

Expériences → le rapport m_g/m_{in} est **le même pour tous les corps** (& nombre pur ← G)

→ possible d'ajuster G de telle sorte que ce rapport soit = 1, càd **qu'on décide** $m_g = m_{in}$

Dans l'idée de ce que suggère l'expérience, il est tentant d'ajouter un ansatz (axiome supplémentaire) à la théorie de Newton : **la masse génératrice de gravitation n'est autre que la masse inertielle**. Notons que :

- aucune inconsistance logique à faire cela. La théorie qui en résulte est parfaitement viable …
- … mais elle donne l'impression de marier des chiens et des chats, d'une certaine façon …
- … et, plus profondément, semble **acter que** la gravité est **liée à la notion d'inertie**

Notons que si on avait été **moins ambitieux** que Newton, avec pour seul objectif la gravitation :

→ donc en se contentant d'une « théorie dynamique des corps sous gravitation » (l'objectif profond de la Relativité Générale –RG –, après tout …)

→ mais dans le cadre de l'espace-temps newtonien (contrairement à la RG !)

il eut été suffisant d'élaborer une théorie donnant directement l'accélération en présence des autres corps, **sans référence à une quelconque notion de masse inertielle**. La (seule !) équation de la théorie aurait été :

$$\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = -\sum_{i\neq k} M_i \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_k - \vec{r}_i\|^3}$$

- pas besoin de définir G !!!
- « masses » M en unités L^3T^{-2}

Cette théorie est en accord avec les observations (de l'époque de Newton à la fin du 19ème siècle …), étant strictement équivalente à la théorie de Newton (mis à part la restriction à la gravitation), dés lors qu'est accepté une fois pour toutes l'ansatz $m_g = m_{in}$.

Quelques remarques (2) :

À cause de la relativité du temps, postuler une interaction instantanée n'aurait pas de sens dans le cadre de **l'espace-temps de Minkowski**

→ une approche Newtonienne de la gravitation en Relativité Restreinte exigerait une loi induisant un **délai** (signe ? Voir ci-dessous) pour que la gravitation puisse **agir à distance**

→ exiger que la gravitation satisfasse le **principe de causalité** impliquerait que l'action de la gravitation ne se manifeste que dans le cône futur de Minkowski attaché à la source du champ gravitationnel (délai >0 pour tout observateur).

Dans l'approche de Newton, c'est l'origine « interne aux corps » des masses (grave et inertielle) qui conduit à un rapport m_g/m_i qui « devrait » dépendre des corps eux-mêmes. Le fait que l'expérience contredise cette attente suggère fortement que, **dans notre esp-tps**, la **réponse des corps à l'action gravitationnelle** s'origine en fait à l'**extérieur des corps eux-mêmes**.

→ invite à imaginer une théorie dans laquelle l'action gravitationnelle est **externe aux corps**

Qu'est-ce qui est « externe » aux corps ? L'**espace-temps** (qui les contient) **lui-même**.

→ le phénomène gravitation comme une propriété de l'espace-temps lui-même ?
Si ce devait être le cas : mvt « sous gravitation » = mvt inertiel …

… mais alors l'espace-temps **NE PEUT PAS** être Newton, ni Minkowski …

→ même si l'espace-temps doit être « localement Minkowskien » (expériences de labo !), sa géométrie ne peut être plane, pour que les **mvts inertiels ne soient pas ceux de Newton**

La gravitation comme effet de la geométrie (non triviale) de l'espace-temps ?

3 – Un problème variationel versus gravitation Newtonienne

D'une part, nous connaissons une formulation variationnelle de la dynamique Newtonienne :

$$x^{i}{}'' = \frac{\partial U}{\partial x^{i}} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x^{i}{}'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^{i}} \quad \text{avec} \quad L = \frac{1}{2} x^{i}{}' x^{i}{}' + U\left(x^{k}\right)$$

où U est le potentiel par unité de masse (convention d'Einstein pour le terme « cinétique »).

D'autre part, nous savons que dans le cadre Minkowskien, extrémiser le temps propre (càd l'invariant de Minkowski, puisque $d\tau^2 = - ds^2$) redonne les mvts inertiels (dans le sens Newton/Minkowski) :

$$x^{i}{}'' = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_M}{\partial x^{i}{}'}\right) = \frac{\partial L_M}{\partial x^{i}} \quad \text{avec} \quad L_M = \sqrt{1 - \frac{1}{V^2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)}$$

Remarquons aussi que, en ce qui concerne les « mvts lents » (càd tels que $v << V$), le « Lagrangien de Minkowski » L_M peut être réécrit, à l'ordre le plus bas en v^2

$$L_M = 1 - \frac{1}{2V^2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$$

ce qui correspond (à une constante près, qui disparait quand on écrit les éqs de Lagrange) au Lagrangien de la dynamique Newtonienne dans le cas inertiel (U=0).

D'OÙ LA QUESTION : comment **modifier le Lagrangien de Minkowski**, en introduisant le potentiel de force de Newton, de telle façon que sa version linéarisée en v^2 et U **redonne le Lagrangien de la dynamique de Newton** ?

Réponse : une solution s'impose : $L_M^{(U)} = 1 - \frac{1}{2V^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2U)$

Comment interpréter ceci en termes d'invariant/de temps propre ?

Ce Lagrangien modifié découle directement, au premier ordre en v^2 et U, de l'invariant suivant :

$$ds_N^2 = -\left(1 - \frac{2U}{V^2}\right)V^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -V^2d\tau^2$$

(nommé « métrique de Newton » dans la suite de ce cours … d'où l'indice « N »)

Si on interprète cette métrique de Newton comme définissant les propriétés géométriques de l'espace-temps, on peut se demander s'il ne s'agit pas en fait de Minkowski, mais dans des coordonnées non cartésiennes. La réponse est NON, si U dépend explicitement de la position (ce point sera explicitement vérifié plus tard, quand nous aurons les éléments math adéquats).

Prenons le temps de résumer ce qui vient d'être fait :

nous avons montré qu'un problème de dynamique Newtonienne, à savoir

le mouvement, dans l'esp-tps de Newton, d'une particule déterminé par un potentiel *U*

peut être réécrit sous la forme d'un problème géométrique, à savoir

déterminer les geodésiques d'un espace-temps différant de celui de Minkowski par le terme (1-2*U*/*V*²) en facteur de la composante temps-temps du tenseur métrique

Il est bon de faire quelques remarques pour insister sur ce que ce résultat veut dire … et surtout sur ce qu'il ne VEUT PAS dire !

- Ce n'est qu'une **réinterpretation géométrique** de la gravitation de Newton (si *U* est le potentiel de l'interaction gravitationnelle). Un **« glissement » de la physique vers la géométrie** !...

- … mais **en aucun cas** cela ne peut être interprété comme étant une théorie géometrique de la gravitation (ce que sera la RG). En effet, cette théorie n'est fondamentalement que celle de Newton, étant donné que nous sommes partis de la théorie de Newton pour construire la métrique de Newton. À ce niveau, nous ne disposons d'**aucun moyen pour obtenir ds_N^2 sans disposer au préalable les acquis de la théorie de Newton** …

- L'**équivalence** entre ces Lagrangiens dynamique & géometrique **n'est pas exacte**, les termes d'ordre $O((v^2)^2,U^2,Uv^2)$ ayant été écartés …

- … ce qui veut dire que si, **pour une raison quelconque** (aucune telle raison n'existe à ce jour !), la métrique de Newton devait être comprise comme décrivant **exactement** la réalité du champ gravitationnel d'un corps isolé, les prédictions sur le mvt des particules test différeraient de celles dérivées de la théorie usuelle de Newton par des termes d'ordre $O((v^2)^2,U^2,Uv^2)$.
  Ces termes $\mathbf{O((v^2)^2,U^2,Uv^2)}$, qui quantifieraient les différences entre les deux théories, seraient appelés, selon la terminologie moderne, des **termes Post-Newtoniens**.

- Dans le même ordre d'idées, si la métrique de Newton représentait la vraie nature de l'esp-tps autour d'un corps isolé, le temps propre séparant les battements d'une horloge au repos ne seraient pas définis par le « temps coordonnée » t, mais par $d\tau^2 = \left(1 - 2U/V^2\right)dt^2$. Le temps propre séparant les battements successifs dépend donc aussi de l'emplacement de l'horloge, en un sens. On peut montrer que ceci conduit à un effet Doppler, d'**origine gravitationnelle** (qui existe en RG, expérience de Pound & Rebka –1960 –, voir exercice).

- Formuler le problème du « mvt sous gravité » en termes de géodésiques dispense de toute définition de la masse inertielle, le calcul des orbites ne nécessitant que la connaissance de la géométrie de l'espace-temps, sans considération sur la nature des particules …

- Toute théorie de la gravitation donnant **directement** la géométrie de l'esp-tps (et interprétant la gravitation en ces termes), **donc sans référence** à la théorie de Newton, doit redonner la métrique de Newton dans les conditions où la théorie de Newton est applicable … sans quoi elle serait immédiatement invalidée par les expériences/observations !

- **Last but not least …** il est d'**importance primordiale** que l'élément assorti d'une géométrie soit **l'espace-temps** lui-même, et pas seulement l'espace. Riemann (le mathématicien qui a inventé les géométries riemanniennes…) a essayé de faire une théorie géométrique de la gravitation (milieu du 19ème siècle). Mais son point de départ était l'esp-tps de Newton. Il ne pouvait donc « introduire de la courbure » que dans la partie espace de l'esp-tps ... Un simple coup d'œil à la forme de la métrique de Newton rend manifeste les raisons de son échec …
Il avait les bonnes mathématiques, mais **pas le bon objet physique** !

4 – Faire une théorie géométrique de la gravitation ?

Nous avons accumulé certains indices incitant à regarder du côté des géométries riemanniennes pour tenter une compréhension plus profonde de ce que la gravitation pourrait être …

Cependant, pour qu'une théorie **géométrique** de la gravitation ait un sens, elle doit être formulée en des termes ne faisant **aucune référence à la théorie de Newton**.

De même que la structure de la théorie de Newton est :

$$\underbrace{\text{champ matériels} \rightarrow \text{potentiel gravitationnel}}_{}$$

équation de Poisson : $\Delta U = -4\pi G \rho$

description matérielle, ne fait intervenir que la densité de masse

il est légitime de tenter, de façon similaire, une théorie géométrique dont la structure serait :

champs matériels → **géométrie de l'espace-temps**

pas nécessairement limité à la densité de masse …

de gauche à droite seulement ?
(double sens : peut compliquer la formulation des problèmes !)

défini par le tenseur métrique g_{ab}

La métrique de Newton doit être la « solution de plus bas ordre » dans les conditions où la gravitation Newtonienne s'applique (confirmation observationnelle). C-à-d quand :

- mvts lents $\longrightarrow$ $v \ll V$ pour les sources & particules tests
- champs gravitationnels faibles $\longrightarrow$ $\left|\Delta v_{\text{dû à la gravité}}\right| \ll V$ pour tous les corps
- champs quasi-stationnaires $\longrightarrow$ $\left|\dfrac{\partial_t(\text{fields})}{\partial_{x,y,z}(\text{fields})}\right| \ll V$ (requiert $v_{sources} \ll V$ ... ... mais pas seulement)

Notons que l'identification de la gravitation aux propriétés métriques de l'espace-temps rend la simple formulation des problèmes plus complexe que dans le cadre Newtonien. Par exemple, une question comme « quel est le champ gravitationnel créé par un objet dont la répartition des masses est donnée par *schtroumpf* » :

- est claire en théorie Newtonienne, *schtroumpf* définissant la structure interne de l'objet à l'origine du champ gravitationnel cherché …
- … mais la **connaissance de cette structure interne** présuppose la connaissance des distances entre les différentes parties de cet objet. Cependant, ces distances **se réfèrent explicitement aux propriétés géométriques de l'espace-temps**. Le problème est que dans une théorie géométrique de la gravitation, ces propriétés sont précisément ce qui doit être déterminé par la résolution du problème considéré, puisqu'elles décrivent le champ gravitationnel !

Licence3 : chapitre 4
Géométrie Riemannienne & calcul tensoriel : introduction

Bertrand Chauvineau

Université Côte d'Azur

Observatoire de la Côte d'Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

1 – Espaces métriques & le cas des espace-temps

Un **espace métrique** est un « ensemble de points » (impasse sur une déf math précise!) sur lequel un **intervalle invariant** entre points voisins est défini, satisfaisant certaines **conditions**.

géométrie/physique : peut être interprété en termes de distance, temps propre, … **peu importe pour l'instant !** **LE** point important : dépend des points voisins considérés, **PAS du système de coordonnées**

précisées prochainement

Si les points sont repérés par N coordonnées (N = dimension de l'espace métrique) dans un certain système de coordonnées, il est usuel d'écrire cet invariant :

$$ds^2 = \sum_{a,b} g_{ab}(x^c)\, dx^a dx^b = g_{ab}(x^c)\, \underbrace{dx^a dx^b}$$

$\star\, Q(x^c + dx^c)$

$\star\, P(x^c)$

Ne nous embêtons pas plus avec le signe de sommation sur des indices répétés : **adoptons la convention d'Einstein une fois pour toutes !!!**

dépend de la localisation du point de référence (P)

forme quadratique de la différence des coord entre les 2 points voisins

quand, dans un monôme, un indice est **présent 2 fois**, il faut **sommer** sur cet indice → $A_i^{ki} = \sum_i A_i^{ki}$; $U_a^c V_{be} \partial_c X^e = \sum_{c,e} U_a^c V_{be} \partial_c X^e$; …

Les $\underbrace{\text{fonctions } g_{ab}(x)}$ sont appelées **composantes du tenseur métrique** (en bref, tenseur métrique)

On demande :

Géométrie Riemannienne

- symétrique, càd qu'on a $g_{ab} = g_{ba}$ (notons qu'une partie antisymétrique serait sans effet dans l'expression du ds^2 à cause du produit avec dx.dx)
- N(N+1)/2 composantes indépendantes car : (1) dimension N, (2) symétrie
- g_{ab} doit être **de classe C^2** (presque partout)
- g_{ab} doit être **de déterminant fini et non nul**

Que se passe-t-il si on considère différent systèmes de coordonnées ? L'invariance de ds^2 est **essentielle** pour déterminer la façon dont les composantes du tenseur métrique changent quand on passe d'un système à un autre.

Considérons donc la transformation : $x^a = f^a(x'^b)$ notée $x^a(x'^b)$

on utilise la même lettre … abus d'écriture, mais usuel !

La façon dont changent les différentielles de coord est une affaire de **mathématiques élémentaires** : $dx'^a = \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \quad \left(\sum_b \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \right)$

Comment se calculent les g'_{ab} , composantes du tenseur métrique dans le système de coord (x') ? L'invariance sus-référée leur impose d'être telles que :

$$\underbrace{g_{ab}(x^c)dx^a dx^b = g'_{ab}(x'^c)dx'^a\, dx'^b}_{ds^2_{PQ} = ds'^2_{PQ}} \qquad \left(\sum_{a,b} g_{ab}(x^c)dx^a dx^b = \sum_{a,b} g'_{ab}(x'^c)dx'^a\, dx'^b \right)$$

L'égalité ayant lieu **pour tout dx**, les nouvelles composantes de la métrique sont déterminées :

Utilisant la convention d'Einstein :	**N'utilisant pas la convention d'Einstein :**
Pour alléger l'écriture, supprimons les (x) et les (x') …	
$g_{ab}dx^a dx^b = g'_{ab}\, dx'^a\, dx'^b$	$\sum_{a,b} g_{ab}\, dx^a dx^b = \sum_{a,b} g'_{ab}\, dx'^a\, dx'^b$
Remplaçons les dx' en fonction des dx	
$g_{ab}dx^a dx^b = g'_{ab} \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} dx^c \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} dx^d$	$\sum_{a,b} g_{ab}\, dx^a dx^b = \sum_{a,b} g'_{ab} \sum_c \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} dx^c \sum_d \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} dx^d$
Permutons les indices (a,b) et (c,d) dans le membre de droite	
$g_{ab}dx^a dx^b = g'_{cd} \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} dx^a \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} dx^b$	$\sum_{a,b} g_{ab}\, dx^a dx^b = \sum_{c,d} g'_{cd} \sum_a \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} dx^a \sum_b \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} dx^b$
Réarrangeons les termes dans le membre de droite ...	
$g_{ab}dx^a dx^b = \left(\frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g'_{cd} \right) dx^a dx^b$	$\sum_{a,b} g_{ab}\, dx^a dx^b = \sum_{a,b} \left(\sum_{c,d} g'_{cd} \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} \right) dx^a dx^b$
… et conclure en identifiant les coefficients de dx.dx	
$g_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g'_{cd}$	$g_{ab} = \sum_{c,d} g'_{cd} \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b}$

… et conclure également quant à l'utilité de la convention d'Einstein !!!

Faisons un petit bilan. Nous connaissons la façon dont se transforment les composantes pour :

- le vecteur déplacement : $$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \quad \text{ou} \quad dx^a = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} dx'^b$$

- le tenseur métrique : $$g_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g'_{cd} \quad \text{ou} \quad g'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} g_{cd}$$

- L'intervalle invariant (un nombre unique, qui ne change pas) : $ds'^2 = ds^2$

Donnons aussi (sans démonstration …) la loi de transformation du déterminant des composantes du tenseur métrique $g = \det(g_{ab})$: (dont l'utilité apparaitra sous peu)

$$g' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-2} g$$

Terminologie : $\dfrac{\partial x'^a}{\partial x^b}$ sont les composantes de la matrice jacobienne de la transfo x → x'

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \det\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right)$$ est le jacobien de la transfo x → x'

→ Notons que les composantes de la matrices jacobienne dépendent du point (sauf dans le cas d'une transformation linéaire)

Exemples d'espaces/espace-temps métriques (ds² de signe constant/non constant) :

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ plan euclidien (2 dim) en coord. cart. $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $g \equiv \det(g_{ab}) = 1$

$ds^2 = dx^2 + x^2 dy^2$ (localmt) plan euclidien en coord. pol. $(dr^2 + r^2 d\theta^2)$ $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$ $g = x^2$

$(X = x\cos y\, , Y = x \sin y \to ds^2 = dX^2 + dY^2)$

$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2$ sphère 2 - dim  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 x \end{pmatrix}$ $g = \sin^2 x$

$ds^2 = -V^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ esp - tps de Minkowski (coord. cart.) $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $g = -1$

$ds^2 = dudv + dy^2 + dz^2$ esp - tps de Minkowski $(u = Vt + x \; , \; v = -Vt + x)$ $(g'_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $g = -\frac{1}{4}$

$ds^2 = -\left(1 - \frac{2U}{V^2}\right) V^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ métrique de Newton $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2U}{V^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $g = -1 + \frac{2U}{V^2}$

… mais PAS la géométrie de l'esp-tps de Newton …
(… l'esp-tps de Newton ne définissant pas de géométrie !)

Important : l'hypervolume (intégrales invariantes) d'un hypercube défini par $(dx^1, dx^2, \ldots)$ est donné par $\sqrt{|g|}dx^1 dx^2 \ldots$

Utilité de *g* !!!

Diagonalisation en un point et espace-temps Lorentziens :

On admet le théorème suivant (math élém/diagonalisation des matrices symétriques) :

Soit un point P appartenant à un espace métrique. Les composantes de la métrique sont $g_{ab}(P)$ dans un certain système de coord (x). Il est toujours possible de trouver un nouveau système de coord (x') dans lequel les nouvelles composantes de la métrique s'écrivent, au point P :

$$(g_{ab})_P = diag\ (\pm 1, \pm 1, \ldots) \qquad (\rightarrow \quad g_{ab}(P) = 0 \text{ si } a \neq b\ )$$

Un **espace-temps lorentzien** est un esp-tps riemannien pour lequel, quand cette diagonalisation est réalisée, N – 1 termes digonaux ont le même signe, le dernier le signe opposé

Dans ce cours, comme souvent en gravitation géometrique (mais d'autres options sont parfois proposées …), nous ne considérerons que des espace-temps lorentzian à 4 dimensions, et nous choisirons la « signature » (–1,+1,+1,+1) pour la métrique.

[rmq : choisir (– 1,+1+1,+1) ou (+1, –1, –1, –1) est une affaire de convention (sans aucune signification physique). Cependant, certaines précautions sont à prendre, au niveau de certaines formules ou définitions, quand on passe d'une convention à l'autre]

→ L'esp-tps de Minkowski … est un esp-tps lorentzien (scoop !) … mais l'esp-tps de Newton n'est lorentzien que si $2U < V^2$, càd, pour une masse sphérique M, que si $r > 2GM/V^2$

2 – Champs scalaires, vectoriels, tensoriels & densitaires. Définitions & exemples

Définitions

Un **champ scalaire** est un « champ de nombres » dont la valeur en tout point **ne dépend que du point**, et pas du système de coord. Il est donc représenté par une fonction des coord du point se transformant comme : $\Phi'(x') = \Phi(x)$

coord d'un **MEME point P** dans deux **syst de coord DIFFERENTS**

Mentionnons que Φ' & Φ sont souvent (abus d'écriture !) représentés par la même lettre …

Un **champ de vecteurs contravariants** est un champ de N-uplets dont les composantes changent comme les différentielles des coordonnées. Explicitement, la transformation des composantes se fait donc à l'aide de la matrice jacobienne :

$$A'^a(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} A^b(x) \qquad (\text{càd comme} \quad dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b\ )$$

… d'où la terminologie « **vecteur** déplacement » … (les vecteurs contravariants correspondent aux vecteurs « habituels »).

Notez la position supérieure des indices dans le cas de vecteurs contravariants.

Un **<u>champ de vecteurs covariants</u>** est un champ de N-uplets dont la transformation des composantes se fait à l'aide de la matrice jacobienne inverse :

$$B'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} B_b$$

Attention à la position des indices !

<u>Notez la position inférieure des indices dans le cas de vecteurs covariants</u>.

Un exemple de vecteur covariant est le **gradient d'une fonction sclaire**. Ceci car :

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^a} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^b}$$

Le gradient **n'est donc pas un vecteur au sens « habituel » du terme !**

Un **<u>champ de tenseurs (p,q)</u>**, ou **<u>de tenseurs p fois cov et q fois contrav</u>**, est un champ de N $^{p+q}$-uplets dont la transformation des composantes se fait à l'aide de p matrices jacobiennes inverses et de q matrices jacobiennes (directes) :

$$T'^{\overbrace{ab\ldots}^{\text{q indices}}}_{\underbrace{\alpha\beta\ldots}_{\text{p indices}}} = \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^e} \frac{\partial x'^b}{\partial x^f} \cdots}_{\text{q matrices jacobiennes}} \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \cdots}_{\text{p matrices jacobiennes inverses}} T^{\overbrace{ef\ldots}^{\text{q indices}}}_{\underbrace{\lambda\mu\ldots}_{\text{p indices}}}$$

On conclu donc de la transformation $$g_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a}\frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g'_{cd} \quad \text{ou} \quad g'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b} g_{cd}$$

des composantes du tenseur métrique qu'il est un … tenseur (!) 2 fois covariant.

Quelques remarques et considérations sur la terminologie

- l'ordre d'un champ tensoriel correspond à son nombre d'indices
- les **vecteurs** (cov & contrav) sont des **tenseurs d'ordre 1**
- un **scalaire** est un **tenseur d'ordre 0**
- un tenseur ayant au moins 1 indice cov ET au moins 1 indice contrav est un tenseur mixte
- donner les composantes d'un tenseur dans un système de coord donne implicitement ses composantes dans tout système de coord
- si toute les composantes d'un tenseur sont nulles dans un syst de coord, elles sont également nulles dans tous les syst de coord, et le tenseur est dit « tenseur nul »
- soient 3 syst de coord (x), (x') & (x''). La transformation des composantes obtenue lors de (x) → (x'') est la même que celle obtenue en composant (x) → (x') et (x') → (x'')

  → cohérence de la définition !

  (si ce n'avait pas été le cas, les critères de tensorialité précédents n'auraient pas de sens !)
- par la suite, nous comprendrons par « champs tensoriels » aussi bien les champs tensoriels définis précédemment que les champs de densités tensorielles (définition ci-après)

Les définitions des **densités tensorielles** (de différents ordres) sont les mêmes que celles de tenseurs, à ceci près qu'une certaine puissance du jacobien (déterminant) intervient en facteur (global) dans les lois de transfo des composantes. In extenso :

$$D'^{ab\,\ldots}_{\alpha\beta\,\ldots} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\omega} \frac{\partial x'^a}{\partial x^e}\frac{\partial x'^b}{\partial x^f}\;\ldots\;\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\;\ldots\; D^{ef\,\ldots}_{\lambda\mu\,\ldots}$$

ω est le poids de la densité.

La relation $g' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-2} g$ montre que le déterminant des composantes de la métrique est une densité scalaire de poids -2

Le tenseur unité (ou de Kroenecker)

Les composantes d'un tenseur dépendent généralement du syst de coord. Il y a cependant une exception remarquable. Soit le tenseur mixte de 2cd ordre, dont les composantes dans (x) sont :

$$T_i^{\;j} = \delta_i^{\;j} \quad \text{avec} \quad \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = \ldots = 1 \;\;\&\;\; \delta_i^{\;j} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Dans tout autre syst de coord (x'), les composantes de ce tenseur sont données par :

$$T'^{\;b}_{a} = \frac{\partial x'^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^a} T_i^{\;j} = \frac{\partial x'^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^a}\delta_i^{\;j} = \frac{\partial x'^b}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^a} = \frac{\partial x'^b}{\partial x'^a} = \delta_a^{\;b}$$

Les composantes de ce tenseur sont donc indépendantes du syst de coord !

3 – Opérations sur les tenseurs

3a- Opérations élémentaires

On peut **additionner** (composante par composante) **2 champs tensoriels de même nature**, càd ayant les mêmes nombres d'indices cov & contrav, et le même poids (si ce sont des densités). On obtient un nouveau champ tensoriel de même nature (vérifiez !). Par exemple :

$$A^c_{ab} \;\;\&\;\; B^c_{ab} \;\; \text{tenseurs (2,1)} \;\; \Rightarrow \;\; C^c_{ab} = A^c_{ab} + B^c_{ab} \;\; \text{tenseurs (2,1)}$$

[indication : montrez que la transfo des composantes de C résulte de celles des composantes de A & B]

$$\text{Notation "matheuse" :} \;\; C = A \oplus B$$

On peut **multiplier 2 champs tensoriels** (sans contrainte sur leurs natures). Si les champs sont d'ordres (p,q) & (p',q'), et de poids ω & ω', on obtient un champ tensoriel (p+p',q+q') de poids ω+ω' (vérifiez !). Par exemple :

$$A^c_{ab} \;\; \text{tenseur (2,1)} \;\;\&\;\; B^b_a \;\; \text{densité (1,1) de poids 2} \;\; \Rightarrow \;\; C^{ce}_{abd} = A^c_{ab} \,.\, B^e_d \;\; \text{densité (3,2) de poids 2}$$

Remarquons que $D^{ce}_{abd} = B^c_a \,.\, A^e_{bd}$ est AUSSI une densité (3,2) de poids 2, mais …

… ce n'est pas le même champ tensoriel !

→ importance de **l'ordre des indices** !!!

$$\text{Notation "matheuse" :} \;\; C = A \otimes B \;\;\;\&\;\;\; D = B \otimes A$$

On peut **contracter un tenseur mixte**. Cette opération consiste à choisir un indice cov & un indice contrav, à leur donner la même valeur σ, puis à sommer sur σ. si le champ initial est d'ordre (p,q), on obtient un tenseur d'ordre (p-1,q-1). Le poids est inchangé.
Par exemple :

$$A_{ab}^{c} \ \text{densité} \ (2,1) \ \text{de poids} \ 1 \ \Rightarrow \ C_{a} = A_{ab}^{b} \ \text{densité} \ (1,0) \ \text{de poids} \ 1$$

Dém :

On a, pour une transfo de coord quelconque $\quad A'^{c}_{ab} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \frac{\partial x^{d}}{\partial x'^{a}} \frac{\partial x^{e}}{\partial x'^{b}} \frac{\partial x'^{c}}{\partial x^{f}} A_{de}^{f}$

Contractons par rapport à c et (disons) b $\quad A'^{c}_{ac} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \frac{\partial x^{d}}{\partial x'^{a}} \frac{\partial x^{e}}{\partial x'^{c}} \frac{\partial x'^{c}}{\partial x^{f}} A_{de}^{f}$

Reconnaitre une composition de dérivations $\quad A'^{c}_{ac} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \frac{\partial x^{d}}{\partial x'^{a}} \delta_{f}^{e} A_{de}^{f} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \frac{\partial x^{d}}{\partial x'^{a}} A_{df}^{f}$

… d'où la conclusion

Suggestion : il peut être instructif de refaire cette dém sans utiliser la convention d'Einstein …

Rmq : dans l'exemple précédent, contracter sur c et a conduit à une autre densité vectorielle (de même nature)

3b- Quelques conséquences & exemples …

Le produit contracté d'un vecteur cov et d'un vecteur contrav

$$A_c \ \text{ vecteur cov.} \ \ \& \ \ B^c \ \text{ vecteur contrav.} \ \ \rightarrow \ \ \Phi = A_c \,.\, B^c \ \ \text{ scalaire}$$

est un scalaire, appelé **produit scalaire** de ces deux vecteurs.
Remarquons que le produit scalaire de 2 vecteurs n'est défini que pour 2 vecteurs de variances opposées : à ce niveau, **pas de notion de produit scalaire pour 2 vecteurs de même nature !**

En particulier, le produit scalaire du vecteur déplacement à partir d'un point P par le gradient d'une fonction scalaire Φ est un scalaire, qui est la variation de Φ dans ce déplacement :

★ $Q(x^c + dx^c)$

★ $P(x^c)$

$$\underbrace{dx^a \partial_a \Phi = d\Phi}_{\text{notation usuelle}} = \underbrace{\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \Phi(P) - \Phi(Q)}_{\text{… abus d'écriture (point/coordonnées) ici …}}$$

De la même façon, le produit tensoriel doublement contracté de la metrique et du vecteur déplacement conduit à un scalaire :

$$g_{ab} dx^a dx^b$$

Le reconnaissez-vous ?

On sait que δ_i^j est un tenseur mixte d'ordre 2. Son (unique) contraction est donc un scalaire, dont la valeur (en tout point) est la dimension de l'espace métrique.

Considérons un tenseur mixte de second ordre M. Considérons aussi un vecteur contrav U. Alors :

$M^a_b U^c$ est un tenseur (1,2) & $V^a \equiv M^a_b U^b$ est un (nouveau) vecteur contrav (fct lin de U)

Le tenseur mixte de 2cd ordre M est interprétable comme une matrice, transformant un champ de vecteurs contrav en un autre tel champ.
Question : pourquoi avons-nous appelé δ^j_i « tenseur unité »?

Remarquons que :
- la même matrice M associe également à tout champ de vect covariant un autre tel champ !
- la contraction de M est la « trace » de la matrice M. C'est un scalaire, qui donc ne dépend pas du syst de coord (propriété bien connue de la trace d'une matrice !)

Dans le même ordre d'idées, un tenseur 2 fois cov M_{ab} associe (linéairement) à tout champ de vect contrav un champ de vect **cov**. Remarquons qu'il y a 2 possibilités :

$$V_a \equiv M_{ab} U^b \;\; \& \;\; W_a \equiv M_{ba} U^b \quad \text{(ordre des indices!)}$$

V & W sont de même nature (cov tous les 2), mais ne sont pas le même champ (sauf si M est symétrique).
Dans le même ordre d'idées, un tenseur 2 fois contrav associe à tout champ de vect cov un champ de vect contrav (et il y a 2 possibilités).

3c- Composantes contravariantes & mixtes du tenseur métrique

Nous connaissons les tenseurs suivants :

$g_{ab}(x^c)$ tenseur métrique (covariant)

caractère tensoriel de sa définition

δ_a^b tenseur mixte

caractère tensoriel venant de sa définition. Avec 2 propriétés remarquables :
- ses composantes sont les mêmes en tout point …
- … et sont indépendantes du syst de coord

À partir de ces 2 tenseurs, il est possible d'en construire un 3ème, 2 fois contrav, nommé G, défini par :

$$g_{ab}\,G^{bc} = \delta_a^c$$

Ses composantes dépendent du point, si c'est le cas pour celles de g. En termes matriciels, g & G sont inverses l'une de l'autre.

Notations & terminologie

On représente g and G en utilisant la même lettre (g)

$$g_{ab}\,g^{bc} = \delta_a^c$$

g_{ab} sont les composantes cov de la métrique

g^{ab} sont les composantes contrav de la métrique

δ_a^b sont les composantes mixtes de la métrique

3d- « élévation » & « abaissement » des indices d'un tenseur

Soit un champ tensoriel quelconque. Il est possible de lui associer d'autres champs tensoriels de même ordre global (& poids inchangé pour des densités), mais de variances différentes par le biais du tenseur métrique. **Ces différents champs tensoriels sont représentés en utilisant la même lettre (convention).**

$$U_a \quad \rightarrow \quad U^a = g^{ab} U_b \quad (\leftrightarrow \quad U_a = g_{ab} U^b \,)$$

$$T_{abc} \quad \rightarrow \quad T_{a.c}^{\;\;b} \equiv g^{be} T_{aec} \;,\; T_a^{\;bc} \equiv g^{be} g^{cf} T_{aef} = g^{ce} T_{a.e}^{\;\;b}$$

$$M_{.b.d}^{a.c.} \quad \rightarrow \quad M_{..cd}^{ab..} = g^{be} g_{cf} M_{.e.d}^{a.f.}$$

Commentaires

Le tenseur métrique étant symétrique, on peut utiliser l'un ou l'autre indice de la métrique pour réaliser les opérations d'élévation/abaissement …

… mais attention aux positions des indices de *T*, *M*, …! Puisque les indices peuvent être déplacés par ce procédé, il est recommandé de laisser libre (avec un espace, ou, mieux, un point comme ci-dessus, ou une *) la place libérée par l'indice déplacé. Cette précaution est inutile dans le cas de tenseurs complètement symétriques, mais est utile dans les autres cas

En élevant, puis abaissant, un même indice, on retrouve l'objet initial :

$$T_a \quad \rightarrow \quad g^{ab} T_a = T^b \quad \rightarrow \quad g_{bc} T^b = g_{bc} g^{ab} T_a = \delta_c^{\,a} T_a = T_c$$

Si ce n'avait pas été le cas, la notation (utilisation de la même lettre) aurait été incohérente

Quel est le tenseur obtenu en élevant les indices de la métrique (initialement covariante) ?

$$\text{en élevant un indice : } \quad g_a^{\ c} = g^{bc} g_{ab} = \delta_a^{\ c}$$

→ d'où la terminologie : tenseur de Kroenecker = comp mixtes de la métrique !

… et en élevant le 2ème indice ? $\quad g^{ac} g^{bd} g_{ab} = g^{ac} \delta_a^{\ d} = g^{cd}$

→ cohérence des notations!

Le produit scalaire de 2 vecteurs de même variance peut être défini au moyen de la métrique par

$$U^a \quad \& \quad V^a \quad \rightarrow \quad g_{ab} U^a V^b \quad \rightarrow \quad = U_a V^a = U^a V_a$$

$$X_a \quad \& \quad Y_a \quad \rightarrow \quad g^{ab} X_a Y_b \quad \rightarrow \quad = \ldots$$

Remarquons que cette définition conduit à un scalaire **dépendant de la métrique**. Par conséquent, changer la métrique change le produit scalaire de 2 vecteurs de même variance. (Alors que le produit scalaire de deux vecteurs de variances opposées est indépendant de la métrique, et en fait ne requiert pas le choix d'une métrique pour être défini.)

4 – Courbes géodésiques

Dans le cas d'une métrique définie positive, càd $ds^2 > 0$ pour tout déplacement non nul, ds^2 est une extension riemannienne naturelle de la notion euclidienne de longueur.
La longueur d'un segment de courbe (C) entre 2 points A & B est alors donnée par :

$$l_{C(A,B)} = \int_{C(A,B)} \sqrt{g_{ab}\left(x^c\right) dx^a\, dx^b}$$

On peut se demander lesquelles parmi toutes les courbes joignant A & B sont de longueurs **extrémales**. Si on paramétrise les courbes joignant A & B par λ, on a :

$$l_{C(A,B)} = \int_{C(A,B)} d\lambda L\left(x^a, x'^a\right) \quad \text{où} \quad L\left(x^a, x'^a \equiv \frac{dx^a}{d\lambda}\right) = \sqrt{g_{ab}\left(x^c\right) x'^a\, x'^b}$$

Les courbes recherchées solutionnent les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^c}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'^c} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ab} x'^a\, x'^b}}\left(\underbrace{g_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x'^c} x'^b}_{\boxed{= g_{ab}\delta^a_c x'^b = g_{cb} x'^b}} + \underbrace{g_{ab} x'^a \frac{\partial x'^b}{\partial x'^c}}_{\boxed{= \text{idem}}}\right)$$

On obtient :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{ac} x'^a}{\sqrt{g_{ab} x'^a\, x'^b}}\right) = \frac{x'^a\, x'^b\, \partial_c g_{ab}}{2\sqrt{g_{ab} x'^a\, x'^b}}$$

Utilisons la liberté sur le choix du paramétrage pour demander que la variation de λ lors d'un petit déplacement le long de la courbe soit proportionnelle à la longueur de ce déplacement. On dit alors que le ***paramètre*** λ est ***affine***. On a donc :

$$d\lambda^2 = K g_{ab}\, dx^a dx^b \quad (\text{avec } K \text{ constant}) \quad \rightarrow \quad g_{ab}\, x'^a\, x'^b = K^{-1}$$

L'équation précédente se réduit alors à : $\boxed{\dfrac{d}{d\lambda}\left(g_{ac} x'^a\right) = \dfrac{1}{2} x'^a\, x'^b\, \partial_c g_{ab}}$

C'est la 1ère forme de l'équation des **courbes géodésiques**, ou courbes de longueur extrémale, **en paramétrisation affine**.

→ rmq : pour qu'une telle **définition** des géodésiques ait un **sens**, une **métrique** est nécessaire (seul cas considéré ici), et elle doit être définie positive (voir plus loin pour éliminer cette condition)

L'équation des géodésiques peut prendre une autre forme en développant le membre de gauche :

$$g_{ac} x''^a + \underbrace{\frac{dg_{ac}}{d\lambda}}\, x'^a = \frac{1}{2} x'^a\, x'^b\, \partial_c g_{ab}$$

$$\boxed{= \partial_b g_{ac} \frac{dx^b}{d\lambda} x'^a = x'^a\, x'^b\, \partial_b g_{ac} = \frac{1}{2}\left(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac}\right) x'^a\, x'^b}$$

$$g_{ac} x''^a + \frac{1}{2}\left(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}\right) x'^a\, x'^b = 0 \quad \xrightarrow[\text{par } g^{cd}]{\text{multiplier}} \quad \boxed{x''^d + \frac{1}{2} g^{cd}\left(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}\right) x'^a\, x'^b = 0}$$

On a alors : $$\boxed{\frac{d^2x^c}{d\lambda^2}+\Gamma^c_{ab}\frac{dx^a}{d\lambda}\frac{dx^b}{d\lambda}=0 \quad \text{avec} \quad \Gamma^c_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}\left(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\right)}$$

La quantité Γ est appelée **connexion (ou symbole) de Christoffel**, ou **connexion métrique**. Elle va être d'une importance primordiale dans la suite.

Rmq : cette connexion est symétrique par rapport à ses indices inférieurs : $\Gamma^c_{ab}=\Gamma^c_{ba}$
(on dit qu'elle est « sans torsion »)

Des règles de transformation de la métrique et de l'opérateur gradient dans un changement de coord découle celle relative aux composantes de la connection (on admet le résultat) :

$$\boxed{\Gamma'^c_{ab}=\frac{\partial x'^c}{\partial x^f}\frac{\partial x^d}{\partial x'^a}\frac{\partial x^e}{\partial x'^b}\Gamma^f_{de}+\frac{\partial x'^c}{\partial x^d}\frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^a\,\partial x'^b}}$$

➔ **CE N'EST PAS** un champ tensoriel, à cause du dernier terme (remarquons qu'il dépend de la dérivée seconde du chgmt de coord).

Tout ceci a été établi dans le cas d'une métrique **définie positive**.
Cependant, si ds² **<u>N'EST PAS</u> définie positive**, on peut définir une « longueur » par

$$l_{C(A,B)}=\int_{C(A,B)}\sqrt{\left|ds^2\right|}=\int_{C(A,B)}\sqrt{\left|g_{ab}\left(x^c\right)dx^a dx^b\right|}$$

et définir les courbes géodesiques comme extrémisant l_C entre 2 points.
<u>L'équation des courbes géodesiques est la même</u> que celle obtenue dans le cas défini positif.

5 – Dérivées covariantes

Rappel : un scalaire est un tenseur d'ordre zéro. Ses dérivées partielles constituent les composantes d'un tenseur cov de 1er ordre (vecteur cov), appelé « gradient du champ scalaire ».

→ question : les dérivées partielles des composantes de tout champ tensoriel définissent-elles les composantes d'un nouveau champ tensoriel ?

Considérons le cas d'un vecteur contrav : $A'^a = \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^b} A^b$

Comment calculer $\dfrac{\partial A'^a}{\partial x'^b}$ en fonction de $\dfrac{\partial A^a}{\partial x^b}$ et de la transformation des coord ?

$$A'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} A^c \;\rightarrow\; \frac{\partial A'^a}{\partial x'^b} = \frac{\partial}{\partial x'^b}\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^c} A^c\right) = \frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\frac{\partial}{\partial x^d}\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^c} A^c\right) = \frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial A^c}{\partial x^d} + \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^d} A^c\right)$$

D'où :

$$\boxed{\partial'_b A'^a = \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\partial_d A^c}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^d} A^c}_{\text{terme 2}}}$$

Notation : $\partial_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ & $\partial'_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial x'^a}$

SANS le terme 2, on conclurait que ces dérivées partielles définissent un tenseur (1,1). Cette conclusion est interdite à cause de la présence du terme 2 :

➔ **le gradient d'un vecteur contrav N'EST PAS un tenseur**

Ceci est valable pour **tout champ tensoriel**, champs scalaires exceptés (mais densités tensorielles incluses).

Rmq : le terme 2 dépend de la dérivée seconde de la transformation des coord …
… tout comme le second terme apparaissant dans la loi de transformation de la connexion !!!

Dérivées covariantes

Par contre, on montre que **la combinaison suivante** :

$$\boxed{\nabla_b A^a = \partial_b A^a + \Gamma^a_{bc} A^c} \longrightarrow$$

définition **dépendant de la métrique** !

EST un tenseur (1,1), appelé **dérivée covariante** du vecteur contrav A

➔ Rmq : importance ici de la symétrisation dans la définition de Γ !!!

La notion de **dérivation covariante** s'étend à **tout type de champ tensoriel** de la façon suivante :

Pour un scalaire (puisque la dérivation partielle → tenseur) : $\nabla_b \Phi = \partial_b \Phi$ tenseur (1,0)

Pour un vecteur contrav (rappel) : $\nabla_b A^a = \partial_b A^a + \Gamma^a_{bc} A^c$ tenseur (1,1)

Pour un vecteur cov : $\nabla_b A_a = \partial_b A_a - \Gamma^c_{ba} A_c$ tenseur (2,0)

Pour tout tenseur : $\underbrace{\nabla_k E^{i_1 i_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots}}_{\text{tenseur (p,q)}} = \partial_k E^{i_1 i_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots} + \Gamma^{i_1}_{\sigma k} E^{\sigma\, i_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots} + \Gamma^{i_2}_{\sigma k} E^{i_1 \sigma \dots}_{j_1 j_2 \dots} + \dots - \Gamma^{\sigma}_{j_1 k} E^{i_1 i_2 \dots}_{\sigma\, j_2 \dots} - \Gamma^{\sigma}_{j_2 k} E^{i_1 i_2 \dots}_{j_1 \sigma \dots} - \dots$

tenseur (p,q) ⟶ tenseur (p+1,q)

Pour une densité tensorielle : $\underbrace{\nabla_k D^{i_1 i_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots}}_{\text{densité (p,q) de poids } \omega}$ = comme si D était un tenseur (p, q) $+ \omega \Gamma^{\sigma}_{k\sigma} D^{i_1 i_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots}$

densité (p,q) de poids ω ⟶ densité (p+1,q) de poids ω

Propriété importante : ainsi définie, la dérivée covariante obéit à la **règle de Leibnitz**

dém (sur un exemple, A & B étant des vecteurs) :

$$\nabla_a \left(A_b B^c\right) = \underbrace{\partial_a \left(A_b B^c\right) + \Gamma^c_{ad} A_b B^d - \Gamma^d_{ab} A_d B^c}_{\text{dériv cov d'un tenseur (1,1)}} = \underbrace{A_b\, \partial_a B^c + B^c \partial_a A_b}_{\text{Leibnitz sur les dérivées partielles}} + \Gamma^c_{ad} A_b B^d - \Gamma^d_{ab} A_d B^c = A_b \underbrace{\left(\partial_a B^c + \Gamma^c_{ad} B^d\right)}_{\nabla_a B^c} + B^c \underbrace{\left(\partial_a A_b - \Gamma^d_{ab} A_d\right)}_{\nabla_a A_b}$$

Remarques & commentaires

Si toutes les composantes de la métrique sont constantes dans un **syst de coord donné** (c'est le cas pour l'espace euclidien & pour l'esp-tps de Minkowski *en coord cartésiennes*), alors les composantes de la connexion s'annulent (en tout point) **dans ce syst de coord.** La dérivée covariante se réduit alors à la dérivée partielle ordinaire.
La connexion s'annulant en tout point → **les dérivées de la connexion s'annulent également.**

Identité de Ricci : la dérivée cov du tenseur métrique est nulle (à vérifier !) : $\nabla_a g_{bc} = 0$

ce qui implique (idem !) : $\nabla_a g^{bc} = 0$

[indication : vérifier d'abord que : $\nabla_a \delta_b^c = 0$]

→ toutes les composantes du tenseur métrique se comportent **comme des constantes par rapport à l'opération de dérivation cov** : $\nabla_a \left(g_{bc} T_{\dots}^{\dots} \right) = g_{bc} \nabla_a T_{\dots}^{\dots}$

L'opération de **dérivation covariante** (contrairement à la dérivation partielle) **n'agit que sur des champs tensoriels**. (Se demander quelle est la dérivée covariante de la connexion de Christoffel (par exemple) n'a aucun sens.)

La quantité Γ_{ac}^c (version « contractée » de la connexion) sera souvent utile dans certains calculs (particulièrement lors de calculs de divergences –voir plus loin – !). Elle est donnée par :

$$\Gamma_{ac}^c = \frac{1}{2} g^{cd} \partial_a g_{cd} \quad \text{ou (on admet)} \quad \partial_a \ln \sqrt{|g|}$$

Remarque :

une connexion définit une notion de « parallélisme local ». On ne donnera pas ici de définition précise de cette notion. Mentionnons simplement pour information que les géodesiques sont également des courbes autoparallèles, càd des courbes dont le vecteur tangent est « transporté parallèlement » (au sens induit par cette connexion) le long de la courbe.
(L'autoparallélisme est en fait la base de la définition des courbes géodésiques dans un contexte plus général, ne requérant aucune notion de métrique a priori.)

Divergence covariante & autres opérateurs

« La » (les « … » car il peut y avoir plusieurs possibilités en fonction de la nature du champ …) **divergence covariante** d'un champ tensoriel T se construit à partir de sa dérivée covariante par contraction de l'indice de dérivation avec un des indices du champ T :

$$\text{tenseur } (0,1) : \quad A^a \quad \rightarrow \quad \nabla_a A^a$$

$$\text{tenseur } (1,0) : \quad B_a \quad \rightarrow \quad \text{élever d'abord l'indice : } \quad B^a = g^{ac} B_c \quad \rightarrow \quad \nabla_a B^a = \nabla_a \left(g^{ac} B_c \right) = g^{ac} \nabla_a B_c$$

$$\text{tenseur } (0,2) : \quad C^{ab} \quad \rightarrow \quad \underbrace{U^a = \nabla_b C^{ab} \quad \text{ou} \quad V^a = \nabla_b C^{ba}}_{\text{deux divergences possibles (différentes si } C \text{ n'est pas symétrique)}}$$

$$\ldots \text{etc} \ldots$$

Le **Laplacien** (cas d'un espace) ou le **Dalembertien** (cas d'un espace-temps) d'un champ scalaire est la divergence covariante de son gradient :

$$\text{scalaire}\,\Phi \;\rightarrow\; \partial_a \Phi \;\;\text{(gradient)} \;\rightarrow\; g^{ab}\partial_b \Phi\,\text{(comp contrav)} \;\rightarrow\; \nabla_a\left(g^{ab}\partial_b\Phi\right) = g^{ab}\nabla_a\partial_b\Phi$$

Rmq : ce Laplacien/Dalembertien peut être mis sous une forme très pratique, faisant intervenir directement la métrique sans passer par le calcul explicite des Christoffel (voir exercice) :

$$g^{ab}\nabla_a\partial_b\Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_a\left(\sqrt{|g|}\,g^{ab}\partial_b\Phi\right)$$

pratique !

… qui permet de **retrouver rapidement** les formes que vous connaissez (coord polaires, sphériques, …) à partir de l'expression du **ds²** dans ces coord

Mentionnons (pour information) également la **dérivée extérieure** d'un champ de vecteurs cov (la notion se généralise à des champs plus complexes). Elle s'écrit :

$$\nabla_b A_a - \nabla_a A_b = \partial_b A_a - \partial_a A_b \quad (\leftarrow \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}) \quad \text{(tenseur} \quad (2,0))$$

Rmq : étant antisymétrique, cet objet a N(N-1)/2 composantes indépendantes dans un espace de dimension N. Si N=3, il a donc 3 (=N) composantes indépendantes.

→ Ceci permet de lui associer, sous certaines conditions (restriction sur les changements de coord admissibles), un vecteur, appelé rotationnel de A (en fait, rotationnel du vecteur « usuel » associé au vecteur cov A par déplacement de son indice, pour « en faire un vecteur contrav »).

6 – Tenseurs de courbure

Le **tenseur de courbure de Riemann-Christoffel** (tenseur R.C.) est (définition) :

$$\boxed{R^{a}_{.bcd} = \partial_c \Gamma^{a}_{bd} - \partial_d \Gamma^{a}_{bc} + \Gamma^{a}_{\sigma c}\,\Gamma^{\sigma}_{bd} - \Gamma^{a}_{\sigma d}\,\Gamma^{\sigma}_{bc}}$$

Comme son nom l'indique, c'est un tenseur. Comme les positions d'indice l'indiquent, ce tenseur est de variance (3,1). Il définit la **courbure intrinsèque** de la variété considérée. On montre (on admettra …) que R.C. s'annule ssi il existe un syst de coord dans lequel les composantes du tenseur metrique sont constantes.

Quand c'est le cas, l'espace (ou esp-tps) considéré est dit **plat** (ou sans courbure intrinsèque) :

$$\text{plat} \iff R^{a}_{.bcd} = 0 \iff \exists\, Coord\ (x)\ \text{telles que}\ \partial_c g_{ab} = 0$$

Mentionnons également que si un espace est plat, la notion locale de parallélisme évoquée précédemment conduit à une notion globale de parallélisme. Réciproquement, **il n'y a pas de notion de parallélisme global dans un espace non plat** (tenseur R.C. non nul)

Remarquons que la possibilité de définir R.C. exige que le tenseur métrique g_{ab} (1) soit 2 fois dérivable, et (2) de déterminant fini et non nul (sans quoi les composantes contrav de la métrique ne peuvent être définies, qui sont nécessaire au calcul de Γ et donc de R.C.).

→ **conditions imposées** (au début …) **pour définir une géométrie riemannienne !!!!!!**

R.C. / symétries

$$R^{a}_{.bcd} = -R^{a}_{.bdc}$$

$$R^{a}_{.bcd} + R^{a}_{.dbc} + R^{a}_{.cdb} = 0$$

Immédiat … vérifiez !

$$R_{abcd} = R_{cdab} \qquad (\to R_{abcd} = -R_{bacd})$$

Identité de Bianchi

$$\nabla_e R^{a}_{.bcd} + \nabla_d R^{a}_{.bec} + \nabla_c R^{a}_{.bde} = 0$$

On admet …

Commutation des dérivées covariantes

(sur un champ de vecteurs contrav)

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) A^c = R^{c}_{.sab} A^s$$

Les dérivées covariantes commutent ssi l'espace est plat

Tenseur de courbure de Ricci

$$R_{ab} = R^{s}_{.asb} = g^{rs} R_{rasb}$$

In extenso :

$$R_{ab} = \partial_s \Gamma^{s}_{ab} - \underbrace{\partial_b \Gamma^{s}_{as}}_{= \partial_b \partial_a \ln \sqrt{|g|}} + \Gamma^{r}_{ab} \Gamma^{s}_{rs} - \Gamma^{r}_{as} \Gamma^{s}_{br}$$

$$\boxed{R_{ab} = R_{ba}}$$

Courbure scalaire (ou scalaire de Ricci) $R = R_s^s = g^{ab} R_{ab}$

Tenseur d'Einstein $E_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$

Tenseur d'Einstein avec « constante cosmologique »

$$E_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab}$$

$$E_a^b = R_a^b - \frac{1}{2} R \delta_a^b + \Lambda \delta_a^b$$

$$E^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} R g^{ab} + \Lambda g^{ab}$$

Le tenseur d'Einstein est symétrique et **sans divergence** : $\nabla_a E^{ab} = 0$

Cette identité, d'importance essentielle en Relativity Générale, provient de l'identité de Bianchi (contractée 2 fois), et de l'identité de Ricci.

Licence3 : chapitre 5
La Relativité Générale

Bertrand Chauvineau

Université Côte d'Azur

Observatoire de la Côte d'Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

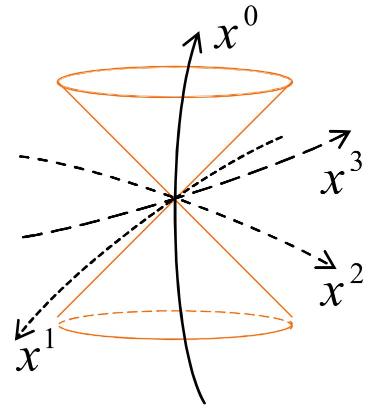
Table des matières

1 – Espace-temps Lorentziens & coordonnées

Coordonnées

Les esp-tps que nous considérerons seront de dimension 4, les coord étant notées (x^0, x^1, x^2, x^3)
Ce seront des esp-tps lorentziens, de signature (-,+,+,+) (recommandation de l'IAU).
En tout événement P, il est donc possible de choisir un syst de coord(X) tel que **en P, et a priori seulement en P**, la métrique prend la forme Minkowski/cartésienne :

$$ds_P^{\ 2} = -V^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\left(dX^0\right)^2 + \left(dX^1\right)^2 + \left(dX^2\right)^2 + \left(dX^3\right)^2$$



Si la métrique est diagonale dans coord (x), une de ses composantes (disons g_{00}) est < 0, les 3 autres (g_{11},g_{22},g_{33}) sont > 0. La courbe suivant laquelle seule la coord x^0 varie se trouve donc à l'intérieur du cône local de Minkowski. Celles suivant lesquelles une seule des coord (x^1, x^2, x^3) varie se trouvent à l'extérieur de ce cône.

- x^0 est alors dite coordonnée temporelle, car $ds^2 < 0$ le long de la courbe coordonnée correspondante (définition générale d'une coord temporelle).
- les 3 coordonnées (x^1, x^2, x^3) sont dites spatiales, car $ds^2 > 0$ le long de ces courbes coordonnée (définition générale d'une coord spatiale).

Cependant, il faut **être conscient** que ces coord ne donnent pas directement les intervalles de temps ni les distances mesurés par des observateurs ! (Voir + loin)

La situation est **plus délicate** dans le cas général, où la métrique **n'est pas diagonale**. Il n'y a alors aucune contrainte sur les signes des éléments diagonaux. (Malgré le fait qu'en tout évt, il y a une et une seule « dimension temporelle » et exactement 3 dimensions spatiales.)

Quoiqu'il en soit, le déterminant de la métrique est une densité scalaire de poids – 2. la métrique étant localement minkowskienne, et le carré du jacobien étant > 0, $\det(g_{ab}) < 0$ dans tout syst de coord. Pour cette raison, on écrit fréquemment $\sqrt{-g}$ à la place de $\sqrt{|g|}$.

Coordonnées géodésiques

On peut montrer qu'il est toujours possible de trouver un syst de coord tel que, pour tout événement P choisi à l'avance, on a non seulement :

$$g_{00}(P) = -1 \;\; ; \;\; g_{11}(P) = g_{22}(P) = g_{33}(P) = 1 \;\; ; \;\; \text{les autres} \quad g_{ab}(P) = 0$$

mais aussi, en même temps : $\partial_c g_{ab}(P) = 0 \qquad (\Leftrightarrow \Gamma^c_{ab}(P) = 0)$

L'existence de telles coord géodésiques a un double intérêt :

(1) mathématique : permettant de simplifier considérablement la démonstration de certaines formules admises dans les chapitres précédents

(2) physique : un tel système de coordonnée définit un référentiel en chute libre à la date et au lieu correspondant à l'évt P. Autrement dit, il annule localement les effets de la gravitation (il implique donc l' « Universalité de la chute libre », parfois appelé « principe d'équivalence faible »)

Coordonnées et temps propre

Considérons un syst coord $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, sans propriété particulière. Soit une particule, et un événement P le long de sa trajectoire. Considérons alors un 2ème syst de coord (t,x,y,z) tel que :

- la particule est instantanément au repos dans coord (t,x,y,z) quand elle passe par P ;
- la métrique a la forme Minkowski/cartesienne en P. L'intervalle calculé le long de l'orbite de la particule, en partant de P, peut se calculer dans les 2 syst de coord :

$$ds^2 = \underbrace{g_{ab}(P)dx^a dx^b}_{\text{calculé dans coord } \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \underbrace{-V^2 dt^2}_{\text{calculé dans coord (t,x,y,z), en P}}$$

Donc, si t (coord minkowskienne) s'interprète comme étant le « **temps propre** de la particule » (on admet ce point, qui ne pose pas de problème en RG –mais qui n'est pas évident dans d'autres théories–), on voit que l'intervalle **ds²** entre 2 évts voisins **mesure** (si il est <0) **l'intervalle de temps propre** entre (mesuré sur l'élément de trajectoire reliant) ces 2 évts.

2 – Le tenseur impulsion-énergie

Dans l'esp-tps de **Minkowski**, tout système (fluide parfait, champ électromagnétique, champ scalaire, …) peut être décrit par un tenseur impulsion-énergie (tenseur IE) T_{ab}. C'est un tenseur de second ordre, construit de telle sorte que :

- il est symétrique : $T_{ab} = T_{ba}$
- les lois de conservation régissant l'évolution du système sont obtenues en exigeant la divergence nulle de ce tenseur, c'est-à-dire, en coord cartésiennes : $\partial_a T^{ab} = 0$

Fluides parfaits (Minkowski)

Le tenseur IE d'un fluide parfait s'écrit : $T^{ab} = (\varepsilon + P) u^a u^b + P m^{ab}$

Fluide parfait …
- … densité d'énergie (ε)
- … pression (P)
- … 4-vitesse (u^a)

métrique de Minkowski en coord cartesiennes (m^{ab})

Les équations de conservation dérivées (par annulation de la divergence) s'écrivent :

$$(\varepsilon + P) u^\alpha \partial_\alpha u^\beta = -\left(m^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta\right) \partial_\alpha P$$ Équation d'Euler relativiste, sans gravitation

$$\partial_\alpha \left(\rho u^\alpha\right) = 0 \quad \text{where} \quad \rho = \exp\left\{\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)}\right\}$$ Conservation de l'énergie (idem !)

Remarquons que retrouver cette équation de conservation de l'énergie demande que le fluide obéisse à une équation d'état de la forme $P = P(\varepsilon)$ (approximation « basse température »), alors que retrouver l'équation d'Euler ne demande rien de tel.

Dans un **esp-tps avec courbure**, on remplace la métrique de Minkowski par la métrique g_{ab} et les dérivées partielles par les dérivées covariantes associées. (Mentionnons que ce procédé n'est ni évident ni unique, et que d'autres propositions d'extension sont –logiquement– possibles.)
En particulier, la « conservation » du tenseur IE s'écrit : $\nabla_a T^{ab} = 0$

Dans le cas du fluide parfait, par exemple : $T^{ab} = (\varepsilon + P) u^a u^b + P\underline{g^{ab}}$ avec $u^a = dx^a / \sqrt{-\underline{g_{ce}} dx^c dx^e}$

et les éqs d'Euler et de conservation de l'énergie : $(\varepsilon + P) u^\alpha \underline{\nabla_\alpha} u^\beta = -(\underline{g^{\alpha\beta}} + u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha P$

$$\underline{\nabla_\alpha} (\rho u^\alpha) = 0 \quad (\Leftrightarrow \partial_\alpha (\underline{\sqrt{-g}} \rho u^\alpha) = 0) \quad \text{avec} \quad \rho = \exp\left\{ \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)} \right\}$$

Rmq 1 : un nuage de particules libres est décrit par un fluide sans pression (P = 0, poussière).
Dans ce cas, l'éq d'Euler devient l'éq des **géodésiques** (et on a $\rho = \varepsilon$).

Rmq 2 : l'éq d'état d'un fluide ultra-relativiste s'écrit (asymptotiquement) $P = \varepsilon/3$ …
… qui est aussi (exactement) l'éq d'état d'un gaz de photons.

Autres exemples

Tenseur IE de Maxwell (électromagn.) :

$$4\pi T^{ab} = F^{ac} F^{b*}_{*c} - \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} \quad avec \quad F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$$

tenseur électromagnétique

(quadri)potentiel vecteur électromagnétique

Tenseur d'un champ scalaire massif : $8\pi T^{ab} = -g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - M^2 \phi^2$

M = masse du champ scalaire

3 – L'équation d'Einstein

En gravité Newtonienne, la matière génère un champ de force (en fait le potentiel dont il dérive) dans l'esp-tps de Newton, dont les propriétés sont indépendantes du contenu (matière, énergie, autres champs, …). Cette équation, qui s'écrit : $\Delta U = -4\pi G\rho$ ou $\Delta\vec{g} = -4\pi G\rho$ avec $\vec{g} = \vec{\partial} U$ est l'équation de Poisson (version locale de la « loi en 1/r² »).

L'équation d'Einstein (ou de la Relativité Générale) décrit comment la géométrie de l'esp-tps est couplée à son contenu (matière, énergie et tout champ non gravitationnel). Cette équation, dans sa première version (c-à-d sans constante cosmologique), s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}}_{\text{Tenseur d'Einstein}} = \chi T_{ab} \qquad \text{avec} \qquad \underbrace{\chi = \frac{8\pi G}{V^4}}}$$

Tenseur d'Einstein

Constante gravitationnelle d'Einstein

Tenseur IE (global)

La relation entre les constantes gravitationnelles d'Einstein & de Newton pour que l'équation de Poisson **induite** (si ok conditions d'application) prenne sa forme usuelle

Quelques remarques & commentaires …

Tandis que la gravitation Newtonnienne ne dépend que de la densité de matière, la gravitation en RG **dépend de tous les champs caractérisant le contenu matériel**. Dans le cas du fluide parfait, par exemple, la densité d'énergie, mais aussi la pression dans la matière, la vitesse du fluide, entrent dans la composition du tenseur IE, donc sont source de gravitation.

Le tenseur d'Einstein étant de divergence nulle, une « équation de conservation » **globale** résulte de l'éq d'Einstein : $\nabla_a T^{ab} = 0$

Si l'esp-tps contient plusieurs champs matériels **non couplés**, le membre de droite de l'éq d'Einstein est la somme des tenseurs IE individuels correspondants. La théorie complète (formulation *lagrangienne* de la RG) indique que chaque tenseur IE est « conservé » :

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \chi \left(\overset{(1)}{T}_{ab} + \overset{(2)}{T}_{ab} + \ldots \right) \quad \& \quad \nabla^a \overset{(1)}{T}_{ab} = 0 \quad \& \quad \nabla^a \overset{(2)}{T}_{ab} = 0 \quad \& \quad \ldots$$

En physique Newtonienne/Minkowskienne :
- conservation de l'énergie ← uniformité du temps
- conservation de l'impulsion ← homogénéité de l'espace
- conservation du moment angulaire ← isotropie de l'espace

Ces symétries sont (a priori) perdues en RG ! Par conséquent, **l'existence de ces quantités conservées n'est pas** (a priori) **assurée** … sauf quand certaines **symétries** sont présentes.

En physique Newtonienne, la notion de masse (les notions de masses …) est un concept fondamental. De plus, la masse d'un objet est la somme des masses de ses parties. **En RG, la situation est très différente**. Par exemple, les seules quantités décrivant une étoile statique constituée d'un fluide parfait sont ses distributions de densité d'énergie ε et sa pression P. Dans ce cas très particulier, une masse globale de l'étoile peut être définie à partir des champs ε & P. mais cette « masse globale » ne peut pas être interprétée (sans ambiguïté) comme la somme des masses de différentes parties de l'étoile.
Considérant des systèmes plus complexes, **la situation est encore pire, la simple notion de masse du système ne pouvant pas être définie d'une façon très générale**. Il en va de même pour la notion de moment angulaire, par exemple. En tant que **concepts fondamentaux**, ces notions appartiennent au **cadre de la physique Newtonienne**.
Cependant, ces notions « neonewtoniennes » **retrouvent un sens dans certains contextes particuliers** … qui sont souvent **pertinents dans de nombreux scénarios astrophysiques** …

L'équation d'Einstein sous forme inverse

$$\boxed{R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \chi T_{ab}} \rightarrow \; -R = \chi T \; \rightarrow \boxed{R_{ab} = \chi\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}\right)}$$

Les deux formes sont équivalentes. Remarquons qu'utiliser la seconde forme dispense d'avoir à calculer la courbure scalaire …

Équation de la RG dans le **vide** : $\boxed{R_{ab} = 0}$

4 – Une brève histoire de la constante cosmologique

1915 : succès multiples de la jeune RG où l'approche Newtonienne était en échec :

- universalité de la chute libre (la théorie de Newton a besoin d'une hypothèse ad hoc, pas la RG !)
- faut-il un délai pour que la gravitation agisse à distance ? Newton : NON (gênant …); RG : OUI (c'est mieux …) (→ théorie des ondes gravitationnelles)

problèmes conceptuels
on n'aime pas la réponse à la Newton, mais **ça n'empêche pas la théorie** de fonctionner (cohérence) et **de « coller aux observations » !**

- **anomalie de l'orbite de Mercure** →

un problème plus « sérieux », de loin, car il **met en jeu la crédibilité observationnelle de la théorie !**

1915 : les idées (préconçues) en vogue sur l'Univers (cosmologie …) :

- aujourd'hui tel qu'il a toujours été, et tel qu'il sera toujours : stationnarité

colle bien avec les idées de Newton sur l'esp-tps … … mais qu'en est-il de l'**histoire de son contenu ?**

- (spatialement) fini/infini ? Olbers : pourquoi le ciel est-il noir ? → finitude spatiale : solution possible ?

ne colle pas avec les idées de Newton sur l'esp-tps … mais **plutôt bien avec celles de la RG !!!**
→ chercher une solution de la RG décrivant un **Univers stationnaire et fini …**

Demandé : stationnarité + homogénéité/isotropie + matière = « gaz de galaxies » sans pression

Minkowski : ok pour stationnarité + homogénéité/isotropie …
… mais : **PAS finitude spatiale** & … Minkowski + éq GR → **vide** (pas de matière)

→ comment modifier $ds^2 = -V^2dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin\theta^2 d\varphi^2)$ (Minkowski en coord sphériques) pour obtenir des sections spatiales de volume fini ?
Volume fini + homogénéité/isotropie → **sphère 3 dim**

(unités telles que $V = 1$, comme souvent lors de calculs dans un contexte relativiste …)

$$ds^2 = -dt^2 + \underbrace{\frac{dr^2}{1-\dfrac{r^2}{R^2}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)}_{\boxed{\text{métrique pour une sphère 3 dim de rayon R}}}$$

$$r = R\sin\psi$$
$$ds^2 = -V^2dt^2 + R^2\left[d\psi^2 + \sin^2\psi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

C'est réglé pour la géométrie de l'esp-tps. Qu'en est-il au sujet de la matière ?

poussière → fluide parfait sans pression ⟶ $T^{ab} = \varepsilon u^a u^b \ \rightarrow\ T = g_{ab}T^{ab} = -\varepsilon$
(supposé modéliser un ensemble de galaxies sans interaction)

mvt → au repos (dans les coord utilisées pour décrire la géométrie attendue) ⟶ $\left(u^a\right) = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau}\right) = (1,0,0,0)$

car $d\tau^2 = -ds^2 = dt^2$

Calculer Christoffel, puis Ricci, et reporter dans l'équation d'Einstein …

→ seulement 3 équations non triviales (4, mais la 4ème est identique à la 3ème), dont 2 indépendantes … mais l'une d'entre elles conduit à **ε = 0**

Aucune solution ne satisfait toutes les demandes !

Solution ? **Modifier l'équation d'Einstein** de telle façon que :

- les propriétés essentielles de l'équation originale soient préservées (système d'éq aux dériv part de 2ème ordre, lois de conservation, …)
- les modifications ne changent rien à l'échelle du système solaire
- elle admette une solution cosmologique satisfaisant les demandes

Solution (Einstein, 1917):

$$\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab}} = \chi T_{ab} \quad \leftrightarrow \quad R_{ab} - \Lambda g_{ab} = \chi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) \qquad \text{(équation ΛRG)}$$

constante cosmologique
(à comprendre comme une nouvelle constante fondamentale de la nature)

de divergence nulle (grâce aux identités (1) de Bianchi (2) de Ricci)

Équation de Poisson induite (a un sens localement, l'esp-tps étant Lorentzien) :

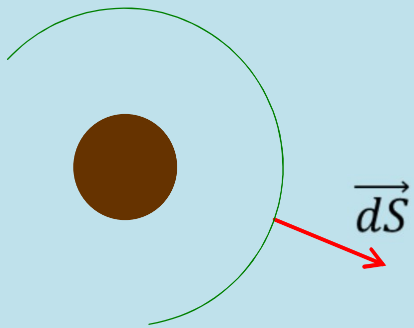
Considérons une masse sphérique (de rayon R) & intégrons dans une sphère de Gauss de rayon r > R

$$\Delta U = -4\pi G\rho + \Lambda$$

$$\boxed{\iiint_{(Vol)} \vec{\partial}(\vec{\partial}U)dV = \oiint_{(Surf)} \vec{dS}.\vec{\partial}U = 4\pi r^2 U'(r)}$$

$$\boxed{\iiint_{(Vol)} \rho dV = m}$$

$$\boxed{\iiint_{(Vol)} \Lambda dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \Lambda}$$



$$\boxed{\partial U = -\underbrace{\frac{Gm}{r^2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\Lambda}{3}r}_{(2)}}$$

(équation de Seeliger-Newman)

Interprétation en termes newtoniens : $\boxed{\vec{\partial}U = \vec{g}}$

la « force gravitationnelle globale » a 2 « composantes » :

(1) Force usuelle en 1/r² (Newton) …

… qui est attractive

(2) une nouvelle force, qui est proportionnelle à la distance …

… et **répulsive !** (si Λ > 0)

Deux forces sont en compétition (interprétation Newtonienne, à petite échelle)
→ existence d'une « distance d'équilibre », où les 2 composantes s'équilibrent exactement

Permet un modèle cosmologique stationnaire ? Les équations d'Einstein non triviales conduisent à 2 équations indépendantes, conduisant aux conditions :

$$\Lambda = 4\pi G\varepsilon \qquad \& \qquad R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \qquad (\rightarrow \text{pas de solution si } \Lambda = 0\,!)$$

L'Univers d'Einstein (Einstein, 1917) est donc caractérisé par (métrique & densité) :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1-\Lambda r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \qquad \& \qquad \varepsilon = \frac{\Lambda}{4\pi G}$$

Quelques années plus tard, on découvre **l'expansion de l'Univers** (Slipher, Hubble, …)

- dommage pour Albert E., qui aurait pu le « prévoir » (Λ ou pas) …
- une solution élégante au « paradoxe d'Olbers » !

Plus besoin de Λ …
… dans la mesure où une solution stationnaire n'est plus nécessaire !

La constante cosmologique : cosmologie moderne versus physique moderne

1998 : on découvre que l'expansion de l'Univers est **accélérée** ! (Perlmutter, Riess & Schmidt)

- accélération depuis quelques milliards d'années, après une phase d'expansion décélérée
- impossible d'interpréter ce fait d'observation dans le cadre :
  (1) RG « usuelle » (càd avec $\Lambda = 0$)
  (2) matière « ordinaire » (càd avec pression positive)
- par contre, ce scénario est **générique dans le cadre de RG avec une constante cosmologique (positive)** (et sans avoir à invoquer une composante matérielle « exotique », à pression négative)

Notons que Λ équivaut à un contenu matériel (de type fluide parfait) de pression négative :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tenseur IE d'un fluide parfait : } T^{ab} = (\varepsilon + P)u^a u^b + P g^{ab} \\ \text{éq d'état : } \varepsilon + P = 0 \;\rightarrow\; P = -\varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \quad T^{ab} = -\varepsilon g^{ab}$$

$$\nabla_b T_a^b = 0 \quad \text{avec} \quad T_a^b = -\varepsilon \delta_a^b \quad \rightarrow \quad \partial_a \varepsilon = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \text{constant}$$

Donc l'équation ΛRG

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \chi T_{ab}$$

peut être **réinterprétée** comme étant l'équation RG sans Λ, mais avec un contenu matériel constitué de la matière « usuelle », de tenseur IE T_{ab} (fluide parfait usuel ou autre) auquel doit être ajouté le tenseur IE d'un (autre) fluide parfait, **d'éq d'état $\varepsilon + P = 0$** :

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=\chi T_{ab}-\Lambda g_{ab}=\chi\left(T_{ab}+\widetilde{T}_{ab}\right)\ \text{avec}\ \ \widetilde{T}_{ab}=\widetilde{P}g_{ab}\ \ \&\ \ \widetilde{P}=-\widetilde{\varepsilon}=-\frac{\Lambda}{\chi}<0$$

(le signe négatif de la « pression exotique » assurant $\Lambda > 0$). Remarquons que demander ce qu'est la 4-vitesse de ce fluide est une question sans objet, car $\widetilde{\varepsilon}+\widetilde{P}=0$)

→ interprétation du terme cosmologique comme manifestation d'un « fluide » exotique !

Très joli !... Mais … seulement une **réinterprétation** … à moins qu'on ne trouve une interprétation naturelle de ce que traduit la présence de ce « fluide exotique » !

Une proposition … venant de la communauté QFT (Quantum Field Theory) …

… qui suggère que **le vide doit être compris** comme une « potentialité d'énergie », et le décrit précisément comme un **fluide parfait** d'éq d'état :

$$\boxed{\overset{(vac)}{P}=-\overset{(vac)}{\varepsilon}}$$

… et ceci est supporté par des **résultats expérimentaux** très concrets !

Si vraiment le vide est une « potentialité d'énergie », il doit logiquement apparaitre dans l'éq d'Einstein (avec $\Lambda = 0$), en plus de la matière ordinaire T_{ab}. L'équation devient donc :

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=\chi\left(T_{ab}+\overset{(vac)}{T}_{ab}\right)\ \rightarrow\ R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=\chi T_{ab}-\overset{(vac)}{\Lambda}g_{ab}\ \ \text{avec}\ \ \overset{(vac)}{\Lambda}\equiv\chi\overset{(vac)}{\varepsilon}=cst$$

De cette façon, on retrouve ΛGR, mais avec une **interprétation QFT de l'origine de Λ** !...
… qui induit ce que devrait être sa **valeur numerique** …

pas si évident que ça dans le détail … :
intégrale divergente → nécessité d'un « cutoff » → Λ^{QFT}

D'un autre côté, pour interpréter les observations
(redshifts des « supernovae cosmologiques »)
avec les modèles cosmologiques **ΛGR** → Λ^{astro}

Jusque là, tout va très bien. Les choses se gâtent quand on compare les deux valeurs …
On trouve, pour leur rapport :

$$\boxed{\frac{\Lambda^{QFT}}{\Lambda^{astro}} \sim 10^{120} \quad !!!}$$

Certains argumentent que ce rapport (dépendant du cutoff) n'est « que » de 10^{60} … ce qui reste tout de même le **PLUS GROS DESACCORD jamais obtenu en physique quand on tente d'interpréter théoriquement des données observationnelles** …

Solutions ?

Face à un tel désaccord, on peut être tenté par **d'autres solutions** pour interpréter Λ.

Les 2 interprétations équivalentes de l'éq ΛGR suggèrent **2 directions** pour aborder ce problème :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad \leftrightarrow \quad R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} + 8\pi \tilde{T}_{\alpha\beta} \left(\tilde{P} = -\tilde{\varepsilon}\right)$$

suggère :
on ne change pas le contenu matériel de l'Univers (membre de droite), **mais la théorie de la gravitation**
→ **théories alternatives de la gravitation**
évoque le problème du périhélie de Mercure

- gravitation tenseur-scalaire
- théories f(R)

suggère :
on ne change pas la théorie de la gravitation (membre de gauche), **mais le contenu matériel de l'Univers**
→ **théories « énergie sombre »**
évoque le problème des anomalies dans l'orbite de Uranus

- énergie sombre

Autres options :

- regarder l'effet d'inhomogénéités locales (vides, …) ;
- renoncer aux symétries à grande échelle (homogénéité, isotropie) ;
- … ???

5 – Résoudre l'équation d'Einstein

Solutions exactes

L'équation d'Einstein étant fortement non-linéaire, obtenir des solutions est complexe. D'un autre côté, comme toutes les équations de la physique, elle peut être résolue en utilisant des méthodes approchées.

→ alors, **pourquoi chercher des solutions exactes ?**

La connaissance de solutions exactes est du **plus grand intérêt**, pour différentes raisons :

- **absence d'artefacts** resultant des schémas d'approximation ;
- même si une solution est d'intérêt purement académique, elle peut **révéler certaines caractéristiques inattendues**, qui peuvent être **spécifiques d'une approche géométrique de la gravitation** (sans « équivalent » en gravitation Newtonienne, par exemple) ;
- (last, but not least!) **certaines solutions exactes « simples »** (fortement symétriques : sphériques, axiales, homogènes, …) sont d'un **intérêt majeur pour l'astronomie** : étoiles (structure interne & champ gravitationnel), trous noirs, cosmologie, …

Pour obtenir de telles solutions (exactes) :
- imposer des symétries → réduit le nombre de fonctions inconnues
- utiliser les libertés sur le choix des coordonnées (liberté de gauge) → idem

Méthodes approchées/perturbatives

Si une solution $\bar{g}_{ab}$ est connue, la méthode consiste à chercher d'autres solutions sous la forme

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + h_{ab} \quad \text{avec} \quad h_{ab} \text{ "petit"}$$

« petit » signifiant que les quantités dépendant de la métrique entrant dans l'équation d'Einstein (tenseurs de courbure, …) peuvent être linéarisées en h_{ab}.

$\bar{g}_{ab}$ est la **solution de fond** (ou de référence), et h_{ab} est la **perturbation**

Quelques exemples :

- fond : Minkowski
- solutions perturbées à l'extérieur/l'intérieur de la matière

$\Rightarrow$ propagation/génération des ondes gravitationnelles (régime linéaire et/ou sources faibles)

- fond : Schwarzschild ou Kerr
- solutions perturbées dans le vide

$\Rightarrow$ Théorie de la relaxation des trous noirs (retour à l'équilibre après perturbation, fusion, …)

- fond : Robertson-Walker
- solutions perturbées avec le même contenu matériel

$\Rightarrow$ Théorie des perturbations cosmologiques

Licence3 : chapitre 6
Solutions à symétrie sphérique

Bertrand Chauvineau

Université Côte d'Azur

Observatoire de la Côte d'Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

1 – La solution de Schwarzschild

La première solution exacte (non triviale) connue (12/1915). C'est une **solution** de la RG dans le vide (résout $R_{ab} = 0$). Sa forme la plus courante (coord de Schwarzschild) est :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)V^2dt^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad \text{avec} \quad r_g = \frac{2GM}{V^2} = 2m$$

comme la métrique de Newton avec un potentiel 1/r (Newton)

esp-tps = réunion de sphères 2 dim (symétrie sphérique)

r_g = constante d'intégration
M = masse « newtonienne »
M = m en unités relativistes (G=V=1)

r = 2m est appelé **sphère de Schwarzschild**

Remarquons que cette solution :
- contient Minkowski comme cas particulier (m=0)
- pour tout m, Schw est asymptotiquement Minkowski pour r >> m (grandes distances)

Singularités :
- r = 0 est une **singularité** de l'espace-temps
- par contre, r = 2m is **N'EST PAS** une singularité de l'espace-temps …
… le caractère singulier de la métrique étant lié au choix des coordonnées

Autres propriétés remarquables (parfois inattendues !) de la solution de Schw :

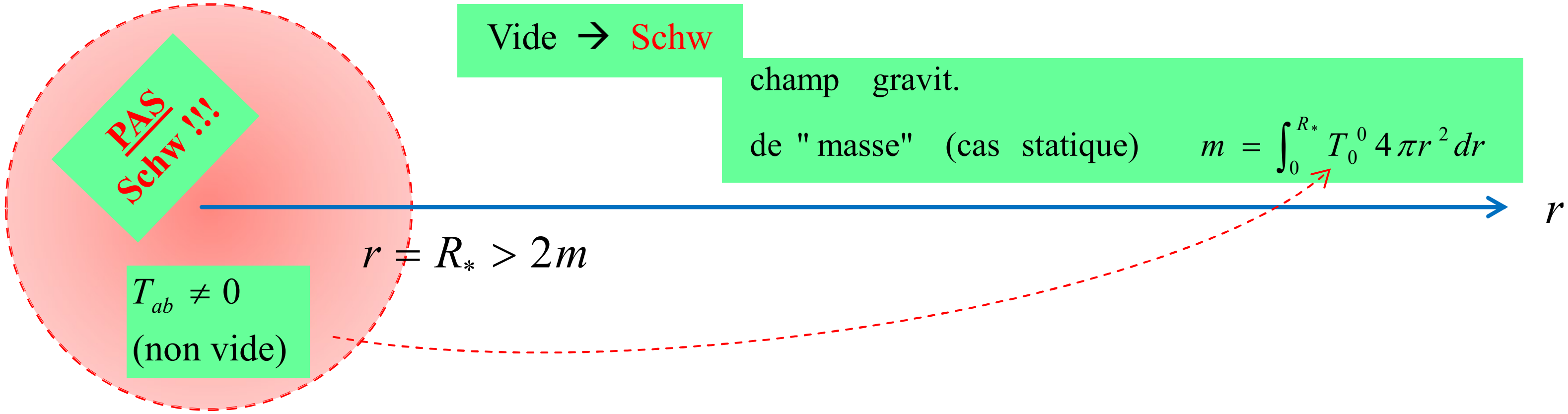
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) V^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad \text{avec} \quad m = \frac{GM}{V^2}$$

- (pour t donné,) l'aire de la surface des points de coord r est $4\pi r^2$ (coord choisies pour cela …)
- pour $r_g > 0$ et $r >> r_g$ les géodésiques (mvt inertiel) peuvent être interprétées comme les mvts Newtoniens de particules test attirées gravitationnellement par un corps de masse M
- **théorème de Birkhoff** : Schw est l'**unique** solution de la RG dans le **vide** entourant un corps sphérique (aux changements de coord près)
- Schw est une solution quelque soit le signe de r_g (ou m). Mais dans le cas négatif, on ne peut pas l'interpréter comme le champ externe d'une étoile (au moins d'une étoile ordinaire …)

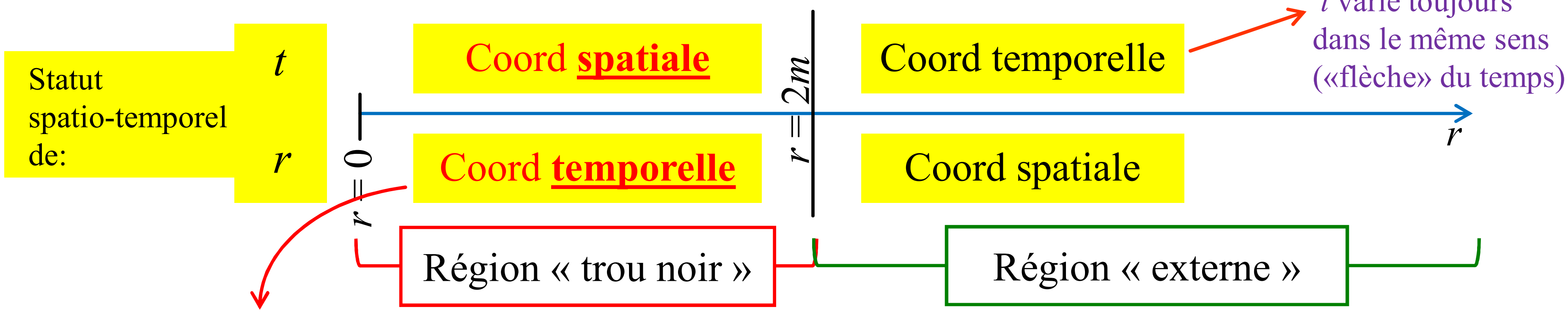
  → **on ne considère généralement que le cas** **$m > 0$** (ce sera le cas dans la suite)
- la solution contient deux régions aux propriétés très différentes : $r > r_g$ et $r < r_g$
- la région $r > r_g$ est stationnaire
- pour $r < r_g$ (si cette région de l'espace-temps est vide, la métrique n'étant pas Schw dans les régions avec matière !), r est une coord temporelle, et t est une coord spatiale. Cette région **N'EST PAS stationnaire** → région **trou noir** !

→ Il y a donc **deux cas physiques à envisager**

1er cas : la matière s'étend jusqu'à des régions $r > 2m$ (cas étoile, planète, … – sphériques ! –)



2ème cas : il n'y a **pas de matière** dans la région $r > 2m$ (cas trou noir – sphérique –)



***r* varie toujours dans le même sens** (« flèche » du temps !!!)
→ si un objet, massif ou non (photons …) traverse la sphère de Schw en venant de l'extérieur (1) il ne peut pas retraverser cette surface dans « l'autre sens », et (2) son mvt le conduit inéluctablement jusqu'à $r = 0$ (date !), donc à la singularité

→ sphère de Schw = horizon du trou noir (ou de Schw)

Géodésiques → mvt inertiel, càd mvt d'une particule test dans le champ gravitationnel d'une étoile sphérique (ou d'un trou noir sans rotation)

Ces équations s'écrivent (mvt « plan »), avec $A = 1 - 2m/r$:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{A'}{A}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} = 0 \qquad \rightarrow \qquad A\frac{dt}{d\tau} = E \quad \text{(cst)}$$

Conservation de l'énergie **de la particule test** dans le champ extérieur

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{AA'}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - rA\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \qquad \rightarrow \qquad r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = K \quad \text{(cst)}$$

Constante des aires

$$\text{cas "lumière"} \quad \rightarrow \quad d\tau = \sqrt{-ds^2}/V = 0 \quad \rightarrow \quad K = \infty$$

Équation de Binet relativiste : éliminer les **deux** variables t & τ pour obtenir l'équation différentielle donnant la description spatiale de l'orbite (équation différentielle exacte !) :

$$\underbrace{\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{m}{(K/V)^2}}_{\text{Équation de Binet/Newton (solutions = coniques)}} + \underbrace{\frac{3m}{r^2}}_{\text{terme/effets relativistes}}$$

Équation de Binet/Newton
(solutions = coniques)

terme/effets relativistes
(solutions ne sont plus des coniques …)
→ **périhélie de Mercure !!!**

le cas "lumière"

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2}$$

Propriétés d'un champ gravitationnel sphérique en RG versus Newton :

Gravitation Newtonienne	Gravitation relativiste (RG)
- on peut communiquer avec un observateur lointain depuis n'importe quel point de l'espace	- on ne peut communiquer avec un observateur lointain **que depuis des points de coord r > 2m** (les points extérieurs à la « région trou noir »)
- (sous l'action de la seule gravitation) il y a des orbites circulaires pour tout r	- il y a des **orbites** (circulaires) **pour r >ou= 3m** seulement (la vitesse sur l'orbite circulaire r = 3m est la vitesse de Minkowski)
- toutes les orbites circulaires sont stables	- seules les orbites circulaires **r > 6m sont stables**
- la vitesse de libération ne dépend pas de la direction dans laquelle la particule est lancée (quelque soit le point de lancement)	- la **vitesse de libération dépend de la direction** dans laquelle la particule est lancée (cette dépendance s'évanouissant à grande distance)
- la lumière est-elle défléchie par un champ gravitationnel ? La réponse n'est pas évidente, et en fait dépend d'hypothèses supplémentaires (sur la nature de la lumière, notamment) $\alpha_{Newton} = \frac{2GM}{V^2 D} \; ? \; = 0 \; ?...???$	- **le comportement de la lumière** (particules se déplaçant à la vitesse de Minkowski) **est déterminé, sans hypothèse supplémentaire**. Ces particules suivent des géodésiques isotropes ($ds^2=0$). Les directions asymptotiques ne sont pas parallèles (en un sens), ce qu'on peut (maladroit !) interpréter en disant que la lumière est « déviée » $\alpha_{RG} = \frac{4GM}{V^2 D}$

2 – La solution de Schwarzschild-de Sitter

Solution sphérique de la RG, mais avec constante cosmologique Λ (résout $R_{ab} = \Lambda g_{ab}$)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) V^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

- redonne Schw pour $\Lambda = 0$ (en coord de Schw)
- n'est pas asymptotiquement Minkowskienne (effet de Λ à grande échelle !)
- pour $9\Lambda m^2 < 1$ (et $m > 0$), la solution possède un horizon analogue à celui de Schw …
- … mais aussi un « horizon cosmologique », à « grande distance » (de nature très différente de l'horizon de Schw)
- le cas $m = 0$ est appelé « solution de de Sitter » (univers vide sans singularité et avec constante cosmologique)
- d'après nos connaissances cosmologiques actuelles, la solution $m = 0$ (de Sitter) décrit l'expansion asymptotique (pour de grandes valeurs du temps) de notre univers (qui devient donc « de plus en plus de Sitter » au fur et à mesure que la matière –ordinaire– est diluée par l'expansion …)

Licence3 : chapitre 7
L’univers en expansion

Bertrand Chauvineau

Université Côte d’Azur

Observatoire de la Côte d’Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

1 – Le principe cosmologique

Important !!! : le ***principe* cosmologique** :

- n'est pas une loi de la physique !!!
  → on connait de nombreuses « solutions cosmologiques » ne le satisfaisant pas
- a en fait plusieurs « justifications » :
  - il semble en accord avec les propriétés de l'Univers tel qu'on l'observe, au moins à certaines échelles (pas à petite échelle –étoiles, galaxies, …–, mais à grande échelle –pas sûr : vides cosmiques, filaments ?–, ou à une échelle intermédiaire)
  - étant donné qu'il impose un certain nombre de symétries, il rend plus aisée l'obtention de solutions exactes, ainsi que la compréhension de leurs propriétés
  - il sert de point de départ pour l'étude de solutions ne satisfaisant pas ce principe, mais dont les propriétés en sont proches (techniques perturbatives)

> Énoncé du principe cosmologique
>
> L'Univers est homogène & isotrope, càd que, à tout instant, ses propriétés sont les mêmes en tout point & dans toutes les directions

… qui a été/est utilisé :
- dans les premières cosmologies Newtoniennes
- dans le 1er modèle de cosmologie relativiste (Einstein, 1917), puis dans les modèles de Lemaitre, Friedmann … (jusqu'à aujourd'hui)

Dans un contexte relativiste, il implique l'existence d'un système de coordonnées dans lequel la métrique de l'espace-temps s'écrit (métrique de Robertson-Walker, forme 1) :

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \quad \text{où} \quad k \in \{0,+1,-1\}$$

a(t) = facteur d'échelle de l'Univers, dépendant du temps (univers évolutif)

section spatiale de l'espace-temps, 3 solutions possibles (k=0,+1,–1)

k = 0 : plat (euclidien)
k = +1 : elliptique
k = –1 : hyperbolique

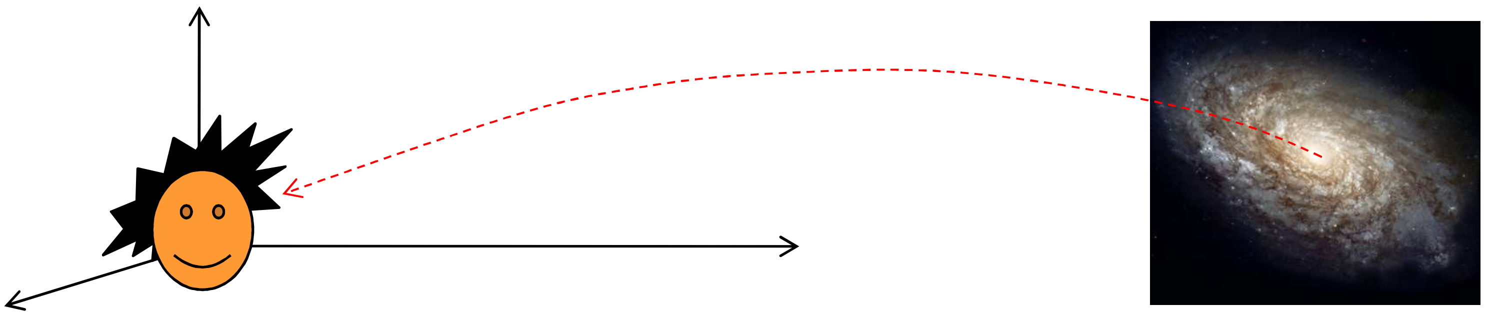
On remarque que pour cette métrique : $\boxed{g_{00} = -1 \quad \& \quad g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0}$

Propriété caractéristique des **métriques synchrones** :
- t = coord temporelle partout …
- … les 3 autres coord = coord spatiales partout
- t = temps propre pour un observateur au repos (ok en RG)
- les lignes de temps (repos, coord spatiales constantes) sont des géodésiques (donc des mvts inertiels)

Autre forme
(forme 2, synchrone aussi) : $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[d\chi^2 + \sigma_k(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$

avec $\sigma_{+1}(\chi) = \sin\chi$, $\sigma_0(\chi) = \chi$, $\sigma_{-1}(\chi) = \sinh\chi$

2 – Décalage spectral et loi (observationnelle) de Hubble



Observateur & galaxie : au repos

$\chi = 0$ χ_{gal} mvt inertiel, car coord synchrone

Un photon émis par une galaxie lointaine atteint l'observateur (au centre des coord.)
Question : comparer les fréquences (ou périodes) du photon à l'émission et à la réception

Période (propre) à l'émission : δt_{em} puisque t est le temps propre pour la galaxie (au repos)
Période (propre) à la réception : δt_{rec} puisque t est le temps propre pour l'observateur (au repos)

$$\text{Donc} \quad : \quad 1 + z = \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} = \frac{\delta t_{rec}}{\delta t_{em}}$$

décalage spectral
(définition)

Photon mvt radial → géodésiques telles que $d\theta = d\varphi = 0$

photon $\rightarrow \quad ds^2 = 0 \quad \rightarrow \quad dt^2 = a(t)^2 d\chi^2 \quad \rightarrow \quad \int_{\chi_{gal}}^{0} d\chi = \int_{t_{em}}^{t_{rec}} -\frac{dt}{a(t)}$

$$\int_{t_{em}}^{t_{rec}} \frac{dt}{a(t)} = \chi_{gal}$$

$$\int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_{rec}+\delta t_{rec}} \frac{dt}{a(t)} = \chi_{gal}$$

le même (comobilité) ➔ $\frac{\delta t_{rec}}{a(t_{rec})} = \frac{\delta t_{em}}{a(t_{em})}$

... et donc : $1 + z = \frac{\delta t_{rec}}{\delta t_{em}} = \frac{a(t_{rec})}{a(t_{em})} \rightarrow \; > 1$ si expansion

Décalage spectral, d'origine cosmologique, vers le **rouge** (redshift) …

… proportionnel à la « distance » pour les objets proches
(loi de Hubble, voir exercice)

$$v = HD \quad \text{avec} \quad H = \frac{a'}{a} \quad (\& \; D = c(t_{rec} - t_{em}))$$

« vitesse » de récession
(interprétation Doppler)

distance

« constante » de Hubble

3 – Modèles cosmologiques

À ce niveau, nous n'avons aucune contrainte sur la fonction a(t), ni, éventuellement, sur k.
Les contraintes viennent de l'éq d'Einstein, qui relie a(t) et k au contenu matériel de l'univers.

Hypothèses sur le contenu matériel : $\underbrace{T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)u_\alpha u_\beta + Pg_{\alpha\beta}}_{\text{fluide parfait …}}$ avec $\underbrace{(u^\alpha) = (1,0,0,0)}_{\text{… comobile}}$

ε (densité d'énergie) et P (pression) étant fcts de t seulement (← homogénéité)

Les **équations du champ** s'écrivent :

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon$$

$$\frac{a''}{a} - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon + 3P) \quad (V = 1)$$

Une **loi de conservation** résulte
de ces équations (conservation de l'énergie) :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\varepsilon a^3) + 3Pa^2\frac{da}{dt} = 0}$$

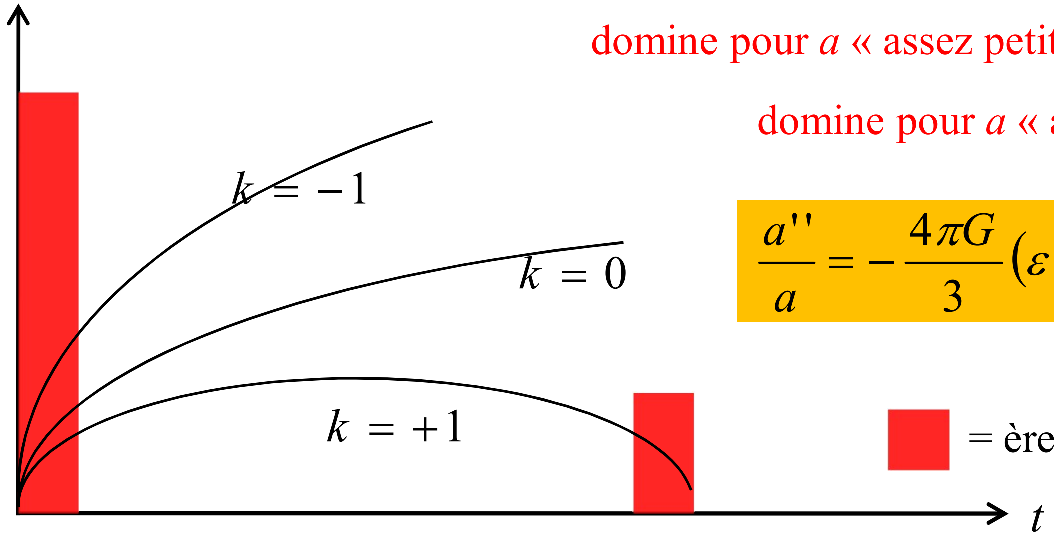
2 cas importants
- poussière : $P = 0 \rightarrow \varepsilon a^3 = cst$
- gaz de photons : $P = \varepsilon / 3 \rightarrow \varepsilon a^4 = cst$

Modèles d'univers de Friedmann-Lemaitre ($\Lambda = 0$)

Contenu matériel = poussière (P=0) + photons (P not 0) → $\varepsilon = \varepsilon_{ph} + \varepsilon_{dust} = \dfrac{K_{ph}}{a^4} + \dfrac{K_{dust}}{a^3}$

domine pour a « assez petit » (ère « radiative »)

domine pour a « assez grand » (ère « poussière »)



$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\varepsilon + 3P\right) \quad \text{qui est} \quad < 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon \ \& \ P > 0$$

= ère(s) radiative(s)

$k = 0$ (modèle « euclidien ») : $a_{ph}(t) \propto t^{1/2}$ & $a_{dust}(t) = \left(6\pi\, G\varepsilon a^3\right)^{1/3} (t - t_1)^{2/3}$

la fonction de Hubble ($H = a'/a$) varie comme : $H(t) = \dfrac{2}{3(t - t_1)} \cong \dfrac{2}{3t}$ pour t assez grand

et la densité matérielle (ère poussière) comme : $\varepsilon(t) = \dfrac{3}{8\pi\, G} H(t)^2$

(dans le cadre de ce modèle – $k = 0$ –), la mesure (locale, actuelle) de la cste de Hubble donne la densité (actuelle) de l'univers

4 – Le modèle de concordance ΛCDM

Observations SuperNovae → contraintes sur modèles cosmologiques

A.G. Riess *et al* (1998)
S. Perlmutter *et al* (1999)

$$\longrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \text{expansion accélérée !!! (depuis peu …)} \end{cases}$$

expansion <u>accélérée</u> !!! (depuis peu …)

Solution **<u>possible</u>** = RG avec Λ

Au cours de l' « ère matière » : $\dfrac{a'^2}{a^2} = \dfrac{8\pi G m}{3a^3} + \dfrac{\Lambda}{3}$ avec $m = \varepsilon a^3 = Cste$

Solution : $$a = \left(\frac{8\pi G m}{\Lambda}\right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} t\right)\right]^{2/3} \xrightarrow[t\to\infty]{} \left(\frac{2\pi G m}{\Lambda}\right)^{1/3} \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right)$$

→ le comportement est asymptotiquement de Sitter, puisque

$$\text{expansion} \quad \rightarrow \quad \frac{8\pi G m}{3a^3} \text{ devient } \ll \frac{\Lambda}{3} \quad \rightarrow \quad \text{Univers} \sim \text{vide avec } \Lambda$$

Ce modèle présente un certaine nombre d'avantages :

- théorie = RG + matière ordinaire (que des choses connues … modulo Λ ...)
- colle très bien aux observations !
- âge de l'Univers ~ 14 milliards d'années, **> âge amas globulaires**
- …

… mais pose aussi quelques questions :

- interprétation de Λ ? (pb évoqué au chap 5 …)
- le pb de la coïncidence :

  à notre époque, il se trouve que dans l'équation $\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi G m}{3a^3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (m = \varepsilon a^3)$

  on a $\Lambda \approx 2 \times \left(8\pi G m \,/\, a^3\right)$

  → même ordre de grandeur, alors que ce sont deux termes de natures très différentes … pourquoi ?
- …

Licence3 : chapitre 8
Gravitation et ondes gravitationnelles

Bertrand Chauvineau

Université Côte d'Azur

Observatoire de la Côte d'Azur / UMR Lagrange

chauvineau@oca.eu

Table des matières

1 – Equation d'Einstein linéarisée

Minkowski étant solution exacte de l'éq d'Einstein dans le vide (sans Λ), cherchons des solutions « proches de Minkowski », en présence ou non de matière. Si matière il y a, le tenseur IE doit nécessairement être considéré comme une quantité « petite » (pour que la métrique puisse rester « proche de Minkowski »). On écrit donc :

$$g_{ab} = m_{ab} + h_{ab} \quad \text{avec} \quad (m_{ab}) = diag\,(-1,1,1,1) \quad \text{et} \quad |h_{ab}| << 1\,, \quad \text{et} \quad |T_{ab}| \approx |h_{ab}|$$

La linéarisation du tenseur de Ricci donne :

$$R_{ab} = \frac{1}{2}\left[\partial_a \partial_c h^c_b + \partial_b \partial_c h^c_a - \underbrace{m^{ce} \partial_c \partial_e h_{ab}} - \partial_a \partial_b h\right] \quad \text{où} \quad h^e_c \equiv m^{ef} h_{cf} \quad \& \quad h = h^e_e$$

d'où l'éq d'Einstein linéarisée :

$$\partial_a \partial_c h^c_b + \partial_b \partial_c h^c_a - m^{ce} \partial_c \partial_e h_{ab} - \partial_a \partial_b h = 16\,\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T m_{ab}\right) \qquad (V = 1)$$

À ce niveau, il est intéressant d'utiliser la liberté dont on dispose sur le choix des coordonnées pour simplifier les équations à résoudre. Cette liberté conduit à pouvoir choisir 4 (dimension de l'esp-tps !) contraintes ~ arbitraires sur les composantes de la métriques (ici sur la perturbation h_{ab}). Par exemple, on peut faire le choix de la gauge de Hilbert :

$$m^{ab} \partial_a \left(h_{bc} - \frac{1}{2} h m_{bc}\right) = 0$$

L'éq d'Einstein linéarisée devient alors (en rétablissant V) :

$$\left(-\frac{1}{V^2}\partial_t\partial_t+\partial_x\partial_x+\partial_y\partial_y+\partial_z\partial_z\right)h_{ab}=-\frac{16\pi G}{V^4}\left(T_{ab}-\frac{1}{2}Tm_{ab}\right)$$

Rmq : si le champ est lentement variable (champ quasi-stationnaire), on peut négliger les dérivations temporelles par rapport aux dérivations spatiales. Si, de plus, le contenu matériel est un fluide dont la pression est faible devant la densité d'énergie (condition « Newtonienne »), alors la composante 00 de cette équation devient, en négligeant la pression

$$\left(\partial_x\partial_x+\partial_y\partial_y+\partial_z\partial_z\right)h_{00}=-8\pi G\,\varepsilon$$

… qui est l'**équation de Poisson**, si on se souvient que h_{00} est, dans ces conditions, le double du potentiel Newtonien.

2 – Equation des ondes gravitationnelles & solution

Dans le vide, l'éq d'Einstein linéarisée en gauge de Hilbert s'écrit (sans faire l'hypothèse de quasi-stationnarité) :

$$\left(-\frac{1}{V^2}\partial_t\partial_t + \partial_x\partial_x + \partial_y\partial_y + \partial_z\partial_z\right)h_{ab} = 0$$

C'est une équation de propagation des perturbations gravitationnelles, à la vitesse de Minkowski (ondes gravitationnelles). Remarquons que :

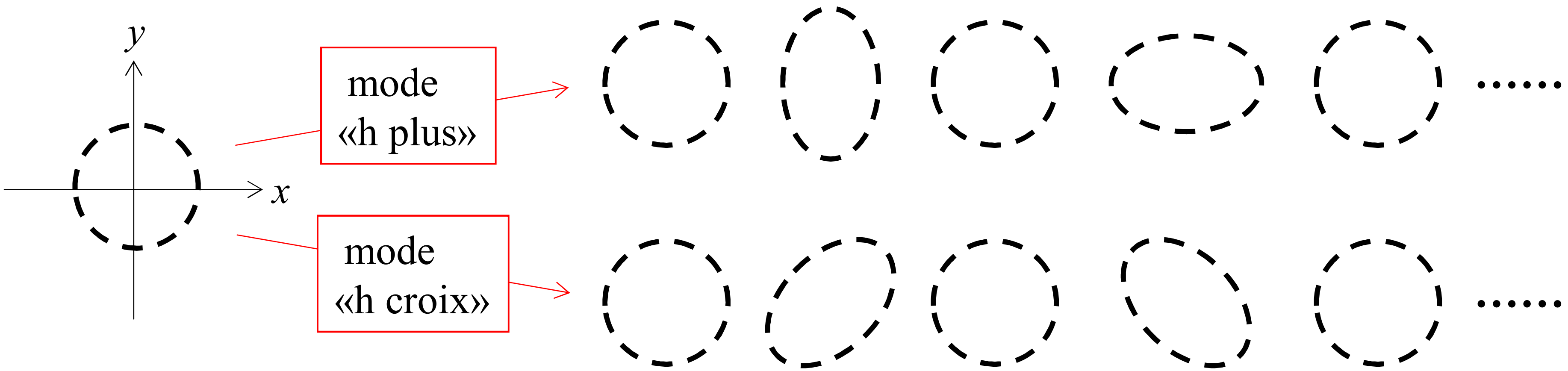
- le fait que la propagation de la gravitation se fasse à la vitesse V est incontournable, c'est une conséquence de la théorie des ondes gravitationnelles (théorie induite par la RG) … ;
- … ceci contrairement à la vitesse de la lumière, qui est liée à la théorie électromagnétique (choisie, indépendamment de la théorie de la gravitation) ;
- en ce sens, dans le contexte de la RG, c'est **la vitesse des ondes gravitationnelles**, *et non celle de la lumière*, qui **est la vitesse** (physique) **de référence naturelle** ;
- ainsi, faisant le choix de la théorie de Maxwell pour l'électromagnétisme, on conclu de ce choix que **la lumière se déplace à la vitesse des ondes gravitationnelles** ;
- remarquons que c'est le choix de la gauge de Hilbert (implicitement d'une certaine famille de coord) qui permet une interprétation aussi immédiate du caractère propagatif de la gravitation (cette réalité ne dépend bien sûr pas du syst de coord, mais la reconnaitre dans un autre syst ne serait pas aussi immédiat).

L'équation d'Einstein linéarisée dans le vide admet la solution suivante ($V = 1$) :

$$ds^2 = \underbrace{-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{Minkowski}} + \underbrace{h^+\left(dx^2 - dy^2\right) + 2h^\times dxdy}_{\text{perturbation}} \quad \text{où} \quad \underbrace{h^+ \ \& \ h^\times}_{\text{modes}} = \text{fcts (arbitraires) de } (t - z)$$

qui représente la solution « onde plane » le long de l'axe z, de l'équation de propagation, en « gauge transverse-traceless » (Hilbert + une petite contrainte supplémentaire, sans restriction physique). **On peut montrer que, dans le cadre de la théorie linéarisée, la solution la plus générale dans le vide est une superposition d'ondes planes de ce type.**

Cette solution onde plane est la superposition de 2 modes : « plus » et « croix ». Leurs effets sont une **déformation <u>anisotrope</u>** des sections spatiales de l'esp-tps, qui se traduit donc par un déréglage d'un Michelson initialement équilibré (bras de longueurs égales) en l'absence d'onde gravitationnelle. Leurs effets, transverses à la direction de propagation, sont représentés par :



3 – Sources, détection, le contexte astronomique

Tout système évolutif, autre qu'une translation à « vitesse constante », ou (en RG) une explosion/implosion sphérique, émet un rayonnement gravitationnel. Un tel rayonnement affecte l'évolution interne du système, et lui prélève de l'énergie (une notion pas simple à définir, et ce n'est d'ailleurs pas toujours possible, dans un régime fortement relativiste).

La détermination du « profil » d'une onde gravitationnelle émise par une source, et son effet sur la source elle-même, sont des problèmes extrêmement complexes, demandant de résoudre les éq du champ en présence de matière (sauf systèmes de trous noirs), dans des régimes généralement très fortement non-linéaires (particulièrement dans les cas impliquant des trous noirs → importance de la « relativité numérique »).

Mentionnons que l'amplitude des ondes gravitationnelles en RG est très faible (d'où la difficulté de les détecter !). Ceci est lié au fait que le rayonnement est dû aux termes quadrupolaires (et plus) des sources, car :

- une évolution sphérique (pulsation, implosion, explosion) ne génère pas de rayonnement gravitationnel **en RG**
  → pas de terme monopolaire (en RG, mais peuvent exister dans d'autres théories)
- le mvt d'ensemble d'un système isolé (mvt de son « centre de masse », non accéléré) ne génère pas de rayonnement gravitationnel
  → pas de terme dipolaire

Les **sources astronomiques** typiques attendues en RG sont notamment :

- les systèmes binaires, compacts et serrés pour avoir un signal d'amplitude mesurable
  → système de 2 trous noirs, de 2 étoiles à neutrons, binaires TN-EN
- fusion des composantes d'un système binaire (d'objets compact)
- oscillations d'un TN retournant à l'équilibre, après avoir englouti un objet massif
- les phénomènes violents non sphériques
  → supernovae, tremblements d'étoiles à neutrons, …
- sources statistiques (bruit de fond de binaires inobservables individuellement, …)
- …

Les observations/détections

Le pulsar binaire PSR 1913+16 (1974, 1ère preuve indirecte du rayonnement gravitationnel) :

- 2 étoiles à neutrons …
- … séparées de : 800 000 à 3 300 000 km (orbite fortement excentrique) …
- révolution en ~ 8 h

→ on a mesuré que la période du système décroit, donc que son énergie mécanique diminue, à un taux correspondant très précisément à l'énergie perdue par émission d'ondes gravitationnelles tel que prévu par la RG (précision de l'ordre de 1/1000)

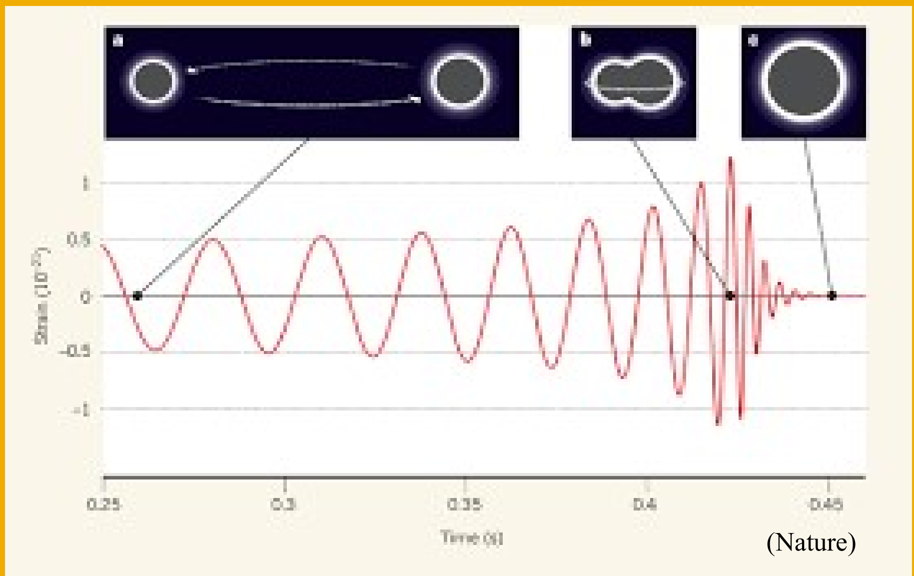
Fusions de trous noirs binaires GW150914, GW151226, GW170104 (2015, 2017, 1$^{\text{ères}}$ preuves directes du rayonnement gravitationnel, et mesure des caractéristiques du signal) :

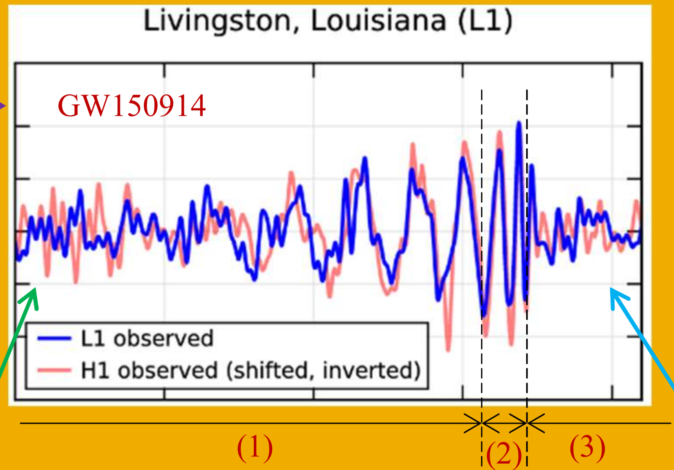
- 2 trous noirs « stellaires » (masses ~ 10, 20 ou 30 masses solaires)
- … en phase spirale (serrée, cycles ultimes) …
- … puis fusion & retour à l'équilibre (oscillations) du trou noir unique final

→ **mesure directe** des **propriétés** de l'onde gravitationnelle : permet de tester
(1) les modèles astrophysiques de profils d'ondes gravitationnelles
(2) la théorie de gravitation sous-jacente (RG)

Théorie/simulations … versus … observations

(1) phase spirallante (2) fusion (3) relaxation





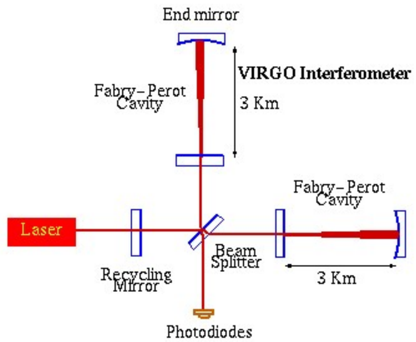
Trou noir final : **62** masses solaires

Trou noir 1 : **36** masses solaires
Trou noir 2 : **29** masses solaires

3 masses sol. rayonnées !

Principe de la détection des détecteurs au sol : interférométrie de Michelson

Détecteurs en service/projet :
- **LIGO 1&2 (US)**
- VIRGO (France-Italie)
- GEO (Allemagne)
- TAMA (Japon)
- LIGO 3 (US-Inde)



<u>Le futur</u> : (détecteurs sol &) espace (eLISA) & enterré (Einstein telescope) & …

<u>L'astronomie des ondes gravitationnelles</u>

- les sources précédemment citées : binaires BH-BH, BH-EN, $\underbrace{\text{EN-EN}}_{\text{Un cas observé !}}$, fusion de binaires, phénomènes violents …
- … sources statistiques (bruit de fond de binaires inobservables individuellement, …)
- l'univers jeune, avant la recombinaison (opaque à l'optique)
- l'univers très jeune, peu après le big bang
- tests des théories de la gravitation mettant en jeu des effets spécifiquement reliés au rayonnement gravitationnel (par ex, possibilité de rayonnement monopolaire dans certaines théories alternatives)
- … **+ tout ce qu'on n'attend pas !!!**